Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Primo Brandi

Convergenza in variazione con peso e uniforme convergenza

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.3-4, p. 181–186.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_3-4_181_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Funzioni di variabile reale. — *Convergenza in variazione con peso e uniforme convergenza* (*). Nota (**) di PRIMO BRANDI, presentata dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — We study, for functions $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, some conditions of uniform and uniform almost everywhere convergence, after pointing out the indipendence from weight of convergence in variation.

1. INTRODUZIONE

Recentemente P. J. Kaiser [6] ha proposto, per le applicazioni $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, $[a, b] \subset \mathbf{R}$, una definizione di variazione pesata con una misura μ del tipo $\mu = \varphi \circ m$, m misura di Lebesgue e $\varphi(t)$ continua e strettamente positiva, che è stata estesa da M. Boni e P. Brandi [2], in senso generalizzato, alle funzioni sommabili

In [3], ispirandoci a un'idea del Cesari [5], ripresa recentemente da M. Boni [1], abbiamo proposto una definizione di variazione con peso su un intervallo del reale che permette di inquadrare in un unico assetto le variazioni classica e generalizzata e successivamente in [4] abbiamo esteso tali concetti ai sottoinsiemi del reale.

In questa Nota, operando sempre in sottoinsiemi del reale, ci occuperemo della indipendenza dal peso della convergenza in variazione, di criteri di convergenza uniforme e uniforme quasi ovunque.

Le dimostrazioni saranno riportate in un lavoro di prossima pubblicazione.

2. NOTAZIONI E DEFINIZIONI

Sia μ una misura su $\mathbf{R}$ assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue m, avente derivata alla Radon–Nikodym uguale quasi ovunque ad una funzione $\varphi(t)$ uniformemente continua, con $0 < \lambda \leq \varphi(t) \leq \Lambda$ per $t \in \mathbf{R}$.

Fissato un sottoinsieme M di $\mathbf{R}$, porremo $h = \inf \mathrm{M}$, $k = \sup \mathrm{M}$ e indicheremo con $\mathring{\mathrm{M}}$, $\bar{\mathrm{M}}$ e M^* rispettivamente l'interno, la chiusura e l'insieme dei punti isolati di M in $\mathbf{R}$; indicheremo inoltre con $\bar{\mathrm{M}}^{(s)}$ l'insieme dei punti di $\bar{\mathrm{M}}$ che sono di accumulazione almeno da sinistra per M e con $\bar{\mathrm{M}}^{(d)}$ l'insieme dei punti di $\bar{\mathrm{M}}$ che sono di accumulazione almeno da destra per M.

Indicheremo con (h, k) uno qualunque degli intervalli $[h, k]$, $]h, k[$, $[h, k[$, $]h, k]$, con il solo vincolo che sia contenuto in $\mathbf{R}$.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico Università di Perugia nell'ambito del G.N.A.F.A-C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1977.

Indicata con $\{I\}_M$ la famiglia degli intervalli chiusi di $\mathbf{R}$ ad estremi in M, consideriamo la funzione d'intervallo definita per ogni $I \in \{I\}_M$ dall'espressione

$$\delta_M(I) = m(I) - \sup_{J \in \mathscr{F}_I} m(J) \qquad \text{dove} \quad \mathscr{F}_I = \{J \in \{I\}_M / J \subset I \, , \, \mathring{J} \cap M = \varnothing\}$$

convenendo di porre $\sup_{J \in \mathscr{F}_I} m(J) = 0$ nel caso la famiglia $\mathscr{F}_I$ fosse vuota.

Indicheremo con $\mathscr{D}_M = \{D\}$ la famiglia di tutte le suddivisioni

$$D \equiv \{x_1, x_2, \cdots, x_N\} \qquad \text{con} \quad h \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_N \leq k \, ,$$
$$x_i \in M \ (i = 1, 2, \cdots, N)$$

e con $x_1 < 0$ se $h < 0$ ed $x_N > 0$ se $k > 0$; useremo anche la notazione $D \equiv [I]$.

Per ogni $D \equiv [I] \in \mathscr{D}_M$, porremo

$$\delta_M(D) = \max_{I \in D} \delta_M(I) + \delta_h + \delta_k$$

dove

$$\delta_h = \begin{cases} x_1 - h & \text{se} \quad h \in \mathbf{R} \\ \dfrac{1}{|x_1|} & \text{se} \quad h = -\infty \end{cases} \qquad \delta_k = \begin{cases} k - x_N & \text{se} \quad k \in \mathbf{R} \\ \dfrac{1}{x_N} & \text{se} \quad k = +\infty \, . \end{cases}$$

Quando M contiene infiniti elementi, l'applicazione $\delta_M : \mathscr{D}_M \to \mathbf{R}_0^+$ è una «mesh» alla Cesari su $\mathscr{D}_M$, la quale si riduce alla «mesh» usuale se M risulta un intervallo compatto in $\mathbf{R}$.

Data una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, indicheremo con f_M la restrizione di f ad M. Inoltre, posto per ogni $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in M$,

$$\theta_{f_M}(I) = (f_M(\beta) - f_M(\alpha)) \frac{\mu(I)}{m(I)} \, ,$$

indicheremo con $v_\mu(f_M, D)$ il numero $\sum_{I \in D} |\theta_{f_M}(I)|$, $D \in \mathscr{D}_M$, e definiamo μ-variazione della f su M la quantità non negativa, finita o no,

$$V_\mu[f_M] = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{\delta_M(D) < \varepsilon} v_\mu(f_M, D) \, , \qquad D \in \mathscr{D}_M \, .$$

Se l'insieme M risulta vuoto o formato da un solo punto, porremo $V_\mu[f_M] = 0$.

Ogni qualvolta $V_\mu[f_M] < +\infty$ diremo che f è a μ-variazione limitata su M. Diremo che un insieme $M \subset \mathbf{R}$ gode della proprietà (G) se, fissato comunque un insieme E di misura nulla disgiunto da M^*, risulta $\overline{M - E} = \overline{M}$.

Indicheremo con $\mathscr{G}$ la classe dei sottoinsiemi M di $\mathbf{R}$ ognuno dei quali gode della proprietà (G).

Fissato un insieme M in $\mathscr{G}$, porremo

$$\mathscr{M} = \{M - E / m(E) = 0 \ \text{et} \ E \cap M^* = \varnothing\}$$

e diremo μ–variazione generalizzata della f su M la quantità non negativa, finita o no,

$$\varphi_\mu [f , \mathrm{M}] = \min_{\mathrm{H} \in \mathcal{M}} \mathrm{V}_\mu [f_\mathrm{H}] .$$

Se risulta $\varphi_\mu [f , \mathrm{M}] < + \infty$, diremo che f è a μ–variazione generalizzata limitata sull'insieme M.

Nel caso in cui M coincide con l'intervallo (h , k), scriveremo $\delta , \mathcal{D}$, $\mathrm{V}_\mu [f] , \varphi_\mu [f]$ rispettivamente al posto di $\delta_\mathrm{M} , \mathcal{D}_\mathrm{M} , \mathrm{V}_\mu [f_\mathrm{M}] , \varphi_\mu [f , \mathrm{M}]$, mentre quando $\mu = m$ ometteremo m sia come indice che come prefisso scrivendo, ad esempio, $\mathrm{V} [f_\mathrm{M}]$ invece di $\mathrm{V}_m [f_\mathrm{M}]$ e variazione invece di m–variazione.

Ovviamente le quantità $\mathrm{V} [f]$ e $\varphi [f]$ coincidono rispettivamente con la variazione classica alla Jordan e con quella generalizzata.

Siano f ed $f_j , j \in \mathrm{N}$, delle funzioni a variazione limitata su M.

Diremo che la successione $\{f_j\}_{j \in \mathrm{N}}$ è α–convergente su M ad f se (α) da ogni sottosuccessione di $\{f_j\}$ si può estrarre una ulteriore sottoscucessione convergente ad f su qualche insieme $\mathrm{H} \in \mathcal{M}$.

Diremo invece che $\{f_j\}$ è β–convergente su M ad f se $\{f_j\}$ è α–convergente su M ad f e se

(*) per ogni $c \in [\overline{\mathrm{M}}^{(s)} \triangle \overline{\mathrm{M}}^{(d)}] \cap \mathrm{M} , c \neq h , c \neq k ,$ risulta

$$\lim_{j \to + \infty} f_{j,\mathrm{M}} (c) = f_\mathrm{M} (c) ,$$

(**) per ogni $c \in \overline{\mathrm{M}}^{(d)} - \overline{\mathrm{M}}^{(s)}, c \neq h ,$ risulta

$$\lim_{j \to + \infty} f_{j,\mathrm{M}} (c + 0) = f_\mathrm{M} (c + 0)$$

e per ogni $c \in \overline{\mathrm{M}}^{(s)} - \overline{\mathrm{M}}^{(d)}, c \neq k ,$ risulta

$$\lim_{j \to + \infty} f_{j,\mathrm{M}} (c - 0) = f_\mathrm{M} (c - 0) .$$

Diremo infine che $\{f_j\}$ è β^{**}–convergente su M ad f se sussistono la (α) e la (**).

Osserviamo che quando M è il complementare, rispetto ad un intervallo, di un insieme di misura nulla, la β–convergenza si riduce alla α–convergenza, la quale, per M limitato in **R** coincide con la convergenza in misura.

3. INDIPENDENZA DAL PESO DELLA CONVERGENZA IN VARIAZIONE

TEOREMA I. *Sia* M *un insieme misurabile con* $m (\mathrm{M}) = m (\overline{\mathrm{M}})$ *e siano* f *ed* $f_j , j \in \mathrm{N}$, *delle funzioni a variazione limitata su* M *con* $\{f_j\}$ β–*convergente su* M *ad* f.

Se

$$\mathrm{V}_\mu [f_\mathrm{M}] = \lim_{\delta_\mathrm{M}(\mathrm{D}) \to 0} v_\mu (f_\mathrm{M} , \mathrm{D}) , \qquad \mathrm{D} \in \mathcal{D}_\mathrm{M}$$

e se

$$(*) \qquad V_\mu [f_M] = \lim_{j \to +\infty} V_\mu [f_{j,M}] \, ,$$

allora risulta

$$(**) \qquad V_\nu [f_M] = \lim_{j \to +\infty} V_\nu [f_{j,M}]$$

per ogni misura $\nu = \varphi \circ m$ *con* $\varphi : (h , k) \to \mathbf{R}$ *uniformemente continua e soggetta alla limitazione* $0 < \lambda \leq \varphi(t) \leq \Lambda < +\infty$, *per ogni* $t \in (h , k)$.

COROLLARIO 1. *Sia* $M \in \mathscr{G}$ *un insieme misurabile con* $m(M) = m(\bar{M})$ *e siano* f *ed* f_j, $j \in N$, *delle funzioni a variazione generalizzata limitata su* M.

Se $\{f_j\}$ *è* β*–convergente ad* f *su* M, *allora condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti*

$$\varphi_\mu [f , M] = \lim_{j \to +\infty} \varphi_\mu [f_j , M]$$

è che

$$\varphi [f , M] = \lim_{j \to +\infty} \varphi [f_j , M] \, .$$

Osserviamo che, se nel Teorema 1 M si riduce ad un intervallo, la β–convergenza si riduce alla α–convergenza e poichè in questo caso la condizione

$$(*) \qquad V_\mu [f_M] = \lim_{\delta_M(D) \to 0} v_\mu (f_M , D) \, , \qquad D \in \mathscr{D}_M \, ,$$

sussiste solo e quando sussiste per ogni peso, il Teorema 1 si esprime dicendo che la (*) è vera solo e quando è vera la (**).

Osserviamo inoltre che il Teorema 1 non sussiste se in esso si abbandona l'ipotesi (*), come mostra il seguente esempio.

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione nulla ovunque escluso nel punto $x = 1$ e, per ogni fissato intero positivo j, sia $f_j : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione nulla ovunque escluso nel punto $x = 2$ nel quale poniamo $f_j(2) = f(1)$.

Posto infine $\varphi(x) = x$ per ogni $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$, risulta:

$$0 = \underline{\lim}_{\delta(D) \to 0} v(f , D) \neq \overline{\lim}_{\delta(D) \to 0} v(f , D) = 2f(1) \, , \qquad D \in \mathscr{D} \, ,$$

$$V[f] = \lim_{j \to +\infty} V[f_j] = 2f(1) \, ,$$

mentre

$$2f(1) = V_\mu [f] \neq \lim_{j \to +\infty} V_\mu [f_j] = 4f(1) \, , \qquad \text{ove} \quad \mu = \varphi \circ m \, .$$

4. CONVERGENZA IN VARIAZIONE E UNIFORME CONVERGENZA

Diremo che un insieme $M \subset \mathbf{R}$ gode della proprietà (*) se differisce dalla propria chiusura al più per l'estremo superiore ed inferiore.

La proprietà (*) è equivalente alla analoga proprietà assunta in [7] dalla Neubrunnovà. Mediante il Teorema 1 è possibile estendere il Teorema 1 di [7] alla convergenza in variazione con peso.

TEOREMA 2. *Siano f ed f_j, $j \in \mathrm{N}$, delle funzioni a variazione limitata su* M. *Sotto le ipotesi*

(i) M *gode della proprietà* (*);

(2i) $\mathrm{V}_\mu[f_\mathrm{M}] = \lim_{\delta_\mathrm{M}(\mathrm{D}) \to 0} v_\mu(f_\mathrm{M}, \mathrm{D})$, $\qquad \mathrm{D} \in \mathscr{D}_\mathrm{M}$;

(3i) $\mathrm{V}_\mu[f_\mathrm{M}] = \lim_{j \to +\infty} \mathrm{V}_\mu[f_{j,\mathrm{M}}]$;

(4i) $f_j \to f$ *uniformemente su ogni compatto* $\mathrm{K} \subset \mathrm{M}$,

la successione $\{f_j\}$ *converge uniformemente su* M *ad* f.

COROLLARIO 2. *Sia $\{f_j\}$ una successione di funzioni convergente (puntualmente) in (h, k) ad una funzione f, continua e a variazione limitata su (h, k). Se sussiste l'uguaglianza*

$$\mathrm{V}[f] = \lim_{j \to +\infty} \mathrm{V}[f_j]$$

allora $f_j \to f$ uniformemente su (h, k).

Il Corollario 2 è una generalizzazione di un noto criterio di convergenza uniforme del Tonelli [9].

5. CONVERGENZA IN VARIAZIONE GENERALIZZATA E UNIFORME CONVERGENZA QUASI OVUNQUE

Diremo che una successione $\{f_j\}$ di funzioni è $\mathscr{I}$-convergente ad f su M se $\{f_j\}$ è uniformemente convergente ad f su ogni insieme $[a, b] \cap \mathrm{M}$, con $a, b \in \mathrm{M}$, $a \leq b$.

La Neubrunnovà ha mostrato in [7] che la $\mathscr{I}$-convergenza è equivalente alla convergenza uniforme su ogni compatto $\mathrm{K} \subset \mathrm{M}$ solo e quando M gode della proprietà (*), cosicchè nel Teorema 2 è equivalente sostituire la proprietà (4i) con la $\mathscr{I}$-convergenza su M.

Il Teorema 2 non sussiste invece se sostituiamo la convergenza in variazione con la convergenza in variazione generalizzata, come mostra il seguente esempio. Sia $f(x) = 0$ per ogni x in $\mathbf{R}$, e per ogni fissato numero naturale j, sia $f_j(x) = 1$ se $x = j$ ed $f_j(x) = 0$ per ogni altro x di $\mathbf{R}$.

Ovviamente $f_j \to f$ uniformemente su ogni compatto di $\mathbf{R}$, ma non uniformemente su $\mathbf{R}$, anche se la variazione generalizzata $\varphi[f_j]$ della f_j converge, al divergere di j, alla variazione generalizzata $\varphi[f]$ di f.

Daltronde la convergenza in variazione generalizzata è sufficiente per ottenere un risultato che traduce nella classe delle funzioni sommabili quello che la Neubrunnovà ha stabilito in [7] nella classe delle funzioni a variazione limitata alla Jordan. Sussiste infatti il seguente

TEOREMA 3. *Sia* $\mathrm{M} \in \mathcal{G}$ *e siano* f *ed* f_j, $j \in \mathrm{N}$, *delle funzioni a variazione generalizzata limitata su* M. *Supponiamo sussistano le proprietà*:

(i) *fissato comunque un intervallo* $[a, b]$ *con* $a, b \in \mathrm{M}$, $a \leq b$, *esista un insieme* E *di misura nulla non contenente alcun punto isolato di* M, *tale che* $\{f_j\}$ *converga uniformemente su* $[a, b] \cap \mathrm{M} - \mathrm{E}$;

(ii)
$$\varphi[f, \mathrm{M}] = \lim_{j \to +\infty} \varphi[f_j, \mathrm{M}] .$$

Sotto queste ipotesi $\{f_j\}$ *converge uniformemente ad* f *su* H, *per qualche* H *in* $\mathcal{M}$.

COROLLARIO 3. *Siano* f *ed* f_j, $j \in \mathrm{N}$, *delle funzioni a variazione generalizzata limitata su* (h, k).

Se $f_j \to f$ *uniformemente quasi ovunque su ogni intervallo* $[a, b] \subset (h, k)$ *e se*

$$\varphi[f] = \lim_{j \to +\infty} \varphi[f_j] ,$$

allora $f_j \to f$ *uniformemente quasi ovunque su* (h, k).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. BONI (1976) – *Variazione generalizzata con peso e quasi additività*, «Atti Sem. Mat. Fis., Università Modena», *25*.

[2] M. BONI e P. BRANDI (1974) – *Variazione, classica e generalizzata, con peso*, «Atti Sem. Mat. Fis., Università Modena», *23*, 286–307.

[3] P. BRANDI (1976) – *Le variazioni con peso in* $\tilde{\mathrm{R}}$, «Atti Sem. Mat. Fis., Università Modena», *25*, 246–258.

[4] P. BRANDI – *Uno spettro di variazioni con peso nei sottoinsiemi di* $\tilde{\mathrm{R}}$. *Teoremi di semicontinuità*. In corso di pubblicazione nei «Rend. Circ. Mat.», Palermo.

[5] L. CESARI (1936) – *Sulle funzioni a variazione limitata*, «Annali Scuola Norm. Sup. Pisa», ser. II, *5*, 229–313.

[6] P. J. KAISER (1975) – *Length and variation with respect to a measure*, «Atti Sem. Mat. Fis. Università Modena», *24*.

[7] A. NEUBRUNNOVÀ (1971) – *Convergence of variations and uniform convergence*, «Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian Math. Publ.», *25*, 45–55.

[8] D. A. SANCHEZ (1964) – *Total variation and uniform convergence*, «Amer. Math. Montly», *71*, 537–539.

[9] L. TONELLI (1912) – *Sugli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni*, «Rend. R. Accad. Lincei», *21* (2), 132–137.