Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sorin Gogonea

Sur quelques problèmes aux limites pour les fonctions analytiques dans le plan muni de coupures le long d'une circonférence

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.1-2, p. 3–9.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_1-2_3_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Analisi matematica. — *Sur quelques problèmes aux limites pour les fonctions analytiques dans le plan muni de coupures le long d'une circonférence.* Nota (*) di SORIN GOGONEA, presentata dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — Sia $\mathscr{D}$ il piano $z = x + iy$ tagliato lungo archi L_j, $j = 1, 2, \cdots, n$, disposti su la circonferenza $|z| = 1$ e senza punti comuni. Si determina una funzione $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ analitica in $\mathscr{D}$, supponendo che $F(z)$ abbia delle singolarità isolate e che i valori di U e V verifichino sugli orli corrispondenti ai tagli le condizioni (2) e (3).

1. Soient dans le plan de la variable complexe $z = x+iy$ les arcs disjoints $L_j : \widehat{A_j B_j}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, situés sur la circonférence $|z| = 1$ et numérotés dans le sens de parcours direct par rapport à l'intérieur de la circonférence. Soient a_j et b_j, respectivement les affixes des extremités A_j et B_j. Considérons sur l'arc L_j, p_j points Λ_{jr} ayant les affixes λ_{jr} $r = 1, 2, \cdots, p_j$. Désignons par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points A_j, B_j et Λ_{jr} et nottons leurs affixes considérés dans un ordre arbitraire par e_l, $l = 1, 2, \cdots, m$, $m = 2n + \sum_{j=1}^{n} p_j$. Soit ensuite $\mathscr{D}$ le plan muni de coupures pratiquées sur les arcs L_j. Les côtés intérieurs (vers l'origine) des coupures seront notés par L_j^+, ceux extérieurs par L_j^- et posons $L^+ = \bigcup_{j=1}^{n} L_j^+$, $L^- = \bigcup_{j=1}^{n} L_j^-$, $\mathscr{L} = L^+ \cup L^-$, $L = \bigcup_{j=1}^{n} L_j$. Soit enfin $F_0(z)$ une fonction uniforme definie dans tout le plan à l'exception de l'ensemble S de ses singularités isolées qui se trouvent en $\mathscr{D}$ à distance finie.

Dans ce travail nous allons considérer le problème suivant. Déterminer une fonction $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ telle que:

a) La différence $\mathscr{F}(z) = F(z) - F_0(z)$ soit holomorphe en $\mathscr{D}$ y compris le point à l'infini.

b) $F(z)$ soit continûment prolongéable sur $\mathscr{L} \setminus \mathscr{E}$, c'est-à-dire les valeurs limites $F^+(\zeta) = U^+(\zeta) + iV^+(\zeta)$ et $F^-(\zeta) = U^-(\zeta) + iV^-(\zeta)$ obtenus en supposant que z tend vers $\zeta \in L^+$, respectivement vers $\zeta \in L^-$ existent.

c) Au voisinage des points de $\mathscr{E}$ on ait

$$|F(z)| < \frac{C^{te}}{|z - e_l|^{\nu}}, \qquad \nu \in (0, 1). \tag{1}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1977.

d) Les valeurs limites de U et de V doivent satisfaire aux conditions

$$a(\zeta)\,U^+(\zeta)+b(\zeta)\,V^+(\zeta)=c^+(\zeta) \qquad \zeta\in L^+\setminus\mathscr{E} \tag{2}$$

$$[\alpha_1 a(\zeta)+\alpha_2 b(\zeta)]\,U^-(\zeta)+[\alpha_2 a(\zeta)-\alpha_1 b(\zeta)]\,V^-(\zeta)=c^-(\zeta), \quad \zeta\in L^-\setminus\mathscr{E} \tag{3}$$

où α_1 et α_2 sont des constantes réeles telles que

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2=1\,, \tag{4}$$

et $a(\zeta)$, $b(\zeta)$ et $c^{\pm}(\zeta)$ des fonctions données sur $L\setminus\mathscr{E}$ ayant certaines proprietés. A savoir, soit $\varphi(\zeta)$ l'une de ces fonctions et désignons par $\varphi(e_k-0)$ et $\varphi(e_k+0)$ les valeurs limites de $\varphi(\zeta)$ obtenues en faisant $\zeta\to e_k$ dans le sens direct et dans le sens contraire. Alors on suppose que: 1) Toutes les limites $\varphi(\lambda_{jr}\pm 0)$, $\varphi(a_j+0)$ et $\varphi(b_j-0)$ existent, 2) $\varphi(\zeta)$ est höldérienne sur chaque arc fermé $\widehat{e_{k_1}, e_{k_2}}$ compris entre deux point succesifs de $\mathscr{E}$ si on atribue au $\varphi(\zeta)$ en e_{k_1} et e_{k_2} respectivement les valeurs $\varphi(e_{k_1}+0)$ et $\varphi(e_{k_2}-0)$. Il en résulte que $\varphi(\zeta)$ est, en suivant la terminologie de [1], une fonction de classe H_0 par rapport à $\mathscr{E}$. On suppose de plus que $a(\zeta)$ et $b(\zeta)$, respectivement leurs valeurs limites, ne sont pas nulles dans les mêmes points. Alors on peut considérer que $a^2(\zeta)+b^2(\zeta)=1$. Compte tenu de (4) il s'ensuit qu'on à egalement $[\alpha_1 a(\zeta)+\alpha_2 b(\zeta)]^2+[\alpha_2 a(\zeta)-\alpha_1 b(\zeta)]^2=1$.

2. On voit donc que le problème ci-dessus represent un problème de Hilbert à singularités données (les coefficient pouvant avoir des discontinuités de première espece dans les points de $\mathscr{E}$) dans le cas où ces coefficients ont sur L^- une forme particulière. Les raisons qui nous ont conduit aux choix des coefficients qui figurent en (3) sont les suivantes. Puisque le problème de Hilber pour un domaine multiplement connexe est, dans le cas général, très difficile, nous nous bornons dans ce travail aux cas où on peut obtenir des solutions effectives en réduissant le problème de Hilbert à deux problèmes de Riemann pour les contours ouverts. Les résultats qui seront obtenus ci-dessous, montrent que la forme choisie pour les coefficients est suffisante pour que la méthode utilisée fournisse la solution du problème. Cette forme est aussi necéssaire. La demonstration respective n'est pas difficile, mais étant assez longue elle ne sera pas donnée dans ce travail.

3. Représentons $F(z)$ sous la forme

$$F(z)=\Phi(z)+\Omega(z) \tag{5}$$

où

$$\Phi(z)=\frac{1}{2}\left[F(z)+\alpha\overline{F\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right] \quad ; \quad \Omega(z)=\frac{1}{2}\left[F(z)-\alpha\overline{F\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right], \tag{6}$$

$$\alpha=\alpha_1+i\alpha_2\,.$$

Il est clair que $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ sont analytiques en $\mathcal{D}$, ayant des singularités dans les points de $S \cup S^*$, où S^* est l'ensemble de points symétriques à S par rapport à $|z| = 1$. En effet si l'on pose

$$(7) \qquad \Phi_0(z) = \frac{1}{2}\left[F_0(z) + \alpha \overline{F_0\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right] \quad ; \quad \Omega_0(z) = \frac{1}{2}\left[F_0(z) - \alpha \overline{F_0\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right]$$

alors les différences $\Phi(z) - \Phi_0(z)$ et $\Omega(z) - \Omega_0(z)$ sont holomorphes en $\mathcal{D}$.

Compte tenu de (6) et (7) il résulte qu'on a nécessairement

$$(8) \qquad \overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar z}\right)} = \bar\alpha \Phi(z) \quad ; \quad \overline{\Omega\left(\frac{1}{\bar z}\right)} = -\bar\alpha \Omega(z) ;$$

$$(9) \qquad \overline{\Phi_0\left(\frac{1}{\bar z}\right)} = \bar\alpha \Phi_0(z) \quad ; \quad \overline{\Omega_0\left(\frac{1}{\bar z}\right)} = -\bar\alpha \Omega_0(z) .$$

Si on denote par $\Phi^+(\zeta)$ et $\Omega^+(\zeta)$ respectivement $\Phi^-(\zeta)$ et $\Omega^-(\zeta)$ les valeurs limites de $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ sur L^+ respectivement sur L^-, on obtient de (2), (3) et (6), à la suite de quelques calculs simples,

$$(10) \qquad \Phi^+(\zeta) = G(\zeta)\, \Phi^-(\zeta) + g(\zeta)$$

$$(11) \qquad \Omega^+(\zeta) = \tilde G(\zeta)\, \Omega^-(\zeta) + \tilde g(\zeta)$$

où

$$(12) \qquad G(\zeta) = -\tilde G(\zeta) = -\bar\alpha \frac{a(\zeta) + ib(\zeta)}{a(\zeta) - ib(\zeta)} ;$$

$$g(\zeta) = \frac{c^+(\zeta) + c^-(\zeta)}{a(\zeta) - ib(\zeta)} \quad ; \quad \tilde g(\zeta) = \frac{c^+(\zeta) - c^-(\zeta)}{a(\zeta) - ib(\zeta)} .$$

On aboutit de la sorte à deux problèmes de Riemann à singularités données pour les contours ouverts L_j et qui satifont, respectivement aux conditions supplémentaires (8).

4. Si on neglige pour l'instant la première condition (8) on peut déterminer, en utilisant les résultats obtenus en [2], la solution qui satisfait à toutes les autres conditions et qui sera notée par $\Phi_1(z)$. À savoir, soit $X(z)$ la solution du problème de Riemann (10) homogène, sans singularités et de classe $h(e_1, e_2, \cdots, e_\rho)$, qui est de la forme

$$(13) \qquad X(z) = A e^{\gamma(z)} \prod_{l=1}^{m} (z - e_l)^{\mu_l} = A X^{(0)}(z) .$$

Dans cette relation A est une constante, $\gamma(z)$ est définie par

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

et μ_l sont des nombres entiers choisis de la sorte que $X(z)$ soit bornée au voisinage des points $e_1, e_2, \cdots, e_\rho$ donnés à l'avance. In en résulte qu'on a au voisinage du $z = \infty$, $\varkappa$ étant l'indice du problème,

$$X(z) = O(z^{-\varkappa}) \quad ; \quad \varkappa = -\sum_{l=1}^{m} \mu_l . \tag{15}$$

Soit $M(z)$ la somme des parties principales la fonction $\Phi_0(z)/X(z)$ relativement à toutes ses singularités. Alors on *a* [2],

$$\Phi_1(z) = X(z)\,[M(z) + P_\varkappa(x)] + \\ + \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{c^+(\zeta) + c^-(\zeta)}{[a(\zeta) - ib(\zeta)]\, X^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \tag{16}$$

où $P_\varkappa(z)$ est un polynôme arbitraire de degré $\varkappa$ si $\varkappa \geq 0$, nul si $\varkappa < 0$.

Si $\varkappa \geq 0$, $\Phi_1(z)$ possède seulement les singularités désirées. Par contre si $\varkappa < 0$, elle possède un pôle supplémentaire à l'infini d'ordre $-\varkappa$. Pour qu'il disparaisse il faut et il suffit que

$$\nu_s - \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{c^+(\zeta) + c^-(\zeta)}{[a(\zeta) - ib(\zeta)]\, X^+(\zeta)} \zeta^{s-1}\, d\zeta = 0, \quad s = 1, 2, \cdots, -\varkappa - 1, \tag{17}$$

où les ν_s résultent du développement au voisinage du $z = \infty$

$$M(z) - \frac{\Phi_0(z)}{X(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j z^{-j} \tag{18}$$

L'accomplissement de ces conditions assure en même temps l'unicité de la solution.

Chercons maintenant de satisfaire à la première condition (8). Dans ce but introduissons la fonction définie par

$$\Phi_{1*}(z) = \alpha \overline{\Phi_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)} \tag{19}$$

Il est facile de vérifier que la différence $\Phi_{1*}(z) - \Phi_0(z)$ est holomorphe en $\mathcal{D}$ et que $\Phi_{1*}(z)$ verifie la conditions (10). Alors

$$\Phi(z) = \tfrac{1}{2}\,[\Phi_1(z) + \Phi_{1*}(z)] \tag{20}$$

est la solution qui satisfait à toutes les conditions, y compris (8).

Si $\varkappa < 0$ et si les conditions (17) sont remplies, vu l'unicité de la solution du problème de Riemann, $\Phi_{1*}(z) = \Phi_1(z)$ et donc $\Phi(z) = \Phi_1(z)$.

Si $\varkappa \geq 0$ la solution a effectivement la forme (20) et il faut calculer $\Phi_{1*}(z)$.

De (16) on obtient

$$(21) \qquad \Phi_{1*}(z) = \alpha \overline{X\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\left[\overline{M\left(\frac{1}{\bar z}\right)} + \overline{P_\varkappa\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\right] -$$

$$- \frac{\alpha}{2\pi i}\overline{X\left(\frac{1}{\bar z}\right)}\int_{L^+}\frac{c^+(\zeta)+c^-(\zeta)}{[a(\zeta)+ib(\zeta)]\,\overline{X^+(\zeta)}}\,\frac{d\bar\zeta}{\bar\zeta-\frac{1}{z}}.$$

Compte tenu de (13), (14), du fait que $|G(\zeta)| = 1$ et que $\zeta\bar\zeta = 1$ et en choisissant A de la forme

$$(22) \qquad A = [X^{(0)}(0)]^{-\frac{1}{2}}$$

on obtient, tout calcul fait, que

$$(23) \qquad \overline{X\left(\frac{1}{\bar z}\right)} = z^\varkappa X(z).$$

En faisant dans cette relation $z \to \zeta \in L^-$, donc $1/\bar z \to \zeta \in L^+$ et en tenant compte de (10) et (12) on obtient $\overline{X^+(\zeta)} = -\alpha\zeta^\varkappa (a - ib)(a + ib)^{-1} X^+(\zeta)$. En substiuant les résultats obtenus en (21) on obtient l'expression de $\Phi_{1*}(z)$ et alors la relation (20) nous donne, tout calcul fait,

$$(24) \qquad \Phi(z) = \frac{1}{2}X(z)\left[M(z) + \alpha z^\varkappa \overline{M\left(\frac{1}{\bar z}\right)} + \sum_{j=0}^{\varkappa}\beta_j z^j\right] +$$

$$+ \frac{X(z)}{4\pi i}\left[\int_{L^+}\frac{c^+(\zeta)+c^-(\zeta)}{[a(\zeta)-ib(\zeta)]\,X^+(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} +\right.$$

$$\left. + z^\varkappa\int_{L^+}\frac{c^+(\zeta)+c^-(\zeta)}{[a(\zeta)-ib(\zeta)]\,X^+(\zeta)}\,\zeta^{-\varkappa}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right)d\zeta\right]$$

où les constantes complexes β_j sont liées par les relations

$$(25) \qquad \beta_j = \alpha\bar\beta_{\varkappa - j}, \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, \varkappa.$$

Ces relations impliquent qu'il s'agit de $\varkappa + 1$ constantes réelle distinctes.

5. La détermination de $\Omega(z)$ est entièrement analogue à celle de $\Phi(z)$. A savoir, posons

$$(26) \qquad Y(z) = \tilde A e^{\tilde\gamma(z)}\prod_{l=1}^{m}(z - e_l)^{-l} = \tilde A Y^{(0)}(z)$$

où $\tilde A$ est une constante, $\tilde\gamma(z)$ est définie par

$$(27) \qquad \tilde\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+}\frac{\ln\tilde G(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

et $\tilde{\mu}_l$ sont des nombres entiers choisis de la sorte que $Y(z)$ soit bornée au voisinage des mêmes points $e_1, e_2, \cdots, e_p$. Au voisinage du $z = \infty$ on a

$$Y(z) = O(z^{-\tilde{\varkappa}}) \quad , \quad \tilde{\varkappa} = -\sum_{j=1}^{m} \tilde{\mu}_l \tag{28}$$

$\tilde{\varkappa}$ étant l'indice du problème.

Soit $N(z)$ la somme des parties principales de la fonction $\Omega_0(z)/Y(z)$ relativement à toutes ses singularités et posons

$$\Omega_1(z) = Y(z)[N(z) + Q_{\tilde{\varkappa}}(z)] + \frac{Y(z)}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{c^+(\zeta) - c^-(\zeta)}{[a(\zeta) - ib(\zeta)]\,Y^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{29}$$

où $Q_{\tilde{\varkappa}}(z)$ est un polynôme arbitraire de dégré $\tilde{\varkappa}$ si $\tilde{\varkappa} \geq 0$ nul si $\tilde{\varkappa} < 0$.

Si $\tilde{\varkappa} \geq 0$, $\Omega_1(z)$ vérifie toutes les conditions sauf la deuxième condition (8). Si $\tilde{\varkappa} < 0$, $\Omega_1(z)$ possède un pole supplémentaire à l'infini de dégré $\tilde{\varkappa}$ qui disparait si et seulement si

$$\tilde{\nu}_s - \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+} \frac{c^+(\zeta) - c^-(\zeta)}{[a(\zeta) - ib(\zeta)]\,Y^+(\zeta)}\, \zeta^{s-1}\, d\zeta = 0\,, \quad s = 1, 2, \cdots, -\tilde{\varkappa} - 1 \tag{30}$$

où les $\tilde{\nu}_s$ resultent du développement au voisinage du $z = \infty$

$$N(z) - \frac{\Omega_0(z)}{Y(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\nu}_j z^{-j}\,. \tag{31}$$

La solution est alors unique.

Si $\tilde{\varkappa} < 0$ et les conditions (30) sont satisfaites, $\Omega_1(z)$ vérifie également la deuxième condition (8) et donc $\Omega(z) = \Omega_1(z)$. Si $\tilde{\varkappa} > 0$, alors

$$\Omega(z) = \frac{1}{2}\left[\Omega_1(z) - \alpha\overline{\Omega_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right]. \tag{32}$$

$\Omega(z)$ s'obtient en procédant comme dans le cas précedant. Si

$$\tilde{A} = [Y^{(0)}(0)]^{-\frac{1}{2}} \tag{33}$$

alors on obtient

$$\begin{aligned}\Omega(z) = {} & \frac{1}{2}\,Y(z)\left[N(z) - \alpha z^{\tilde{\varkappa}}\overline{N\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + \sum_{j=0}^{\tilde{\varkappa}} \tilde{\beta}_j z^j\right] + \\ & + \frac{1}{4\pi i}\,Y(z)\left[\int_{L^+} \frac{c^+(\zeta) - c^-(\zeta)}{[a(\zeta) - ib(\zeta)]\,Y^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \right. \\ & \left. + z^{-\tilde{\varkappa}}\int_{L^+} \frac{c^+(\zeta) - c^-(\zeta)}{[a(\zeta) - ib(\zeta)]\,Y^+(\zeta)}\, \zeta^{-\tilde{\varkappa}}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta\right]\end{aligned} \tag{34}$$

où les constantes complexes $\tilde{\beta}_j$ sont liées par les relations

$$\tilde{\beta}_j = -\alpha\tilde{\beta}_{\tilde{x}-j}\,, \qquad j = 0\,, 1\,, 2\,, \cdots, \tilde{\varkappa} \tag{35}$$

Vu ces relations $\tilde{\beta}_j$ contiennent $\tilde{\varkappa} + 1$ constantes réelles distinctes.

6. On peut donc conclure que:

a) Si $\varkappa \geq 0$ et $\tilde{\varkappa} \geq 0$, $F(z) = \Phi(z) + \Omega(z)$, $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ étant données par (24) et (33). La solution depende de $\varkappa + \tilde{\varkappa} + 2$ constantes arbitraires réelles.

b) Si $\varkappa \geq 0$ et $\tilde{\varkappa} < 0$, $F(z) = \Phi(z) + \Omega_1(z)$ et l'on prend $\tilde{\beta}_j = 0$. La solution existe si et seulement si les conditions (30) sont remplies et elle depende de $\varkappa + 1$ contastantes arbitraires réelles.

c) Si $\varkappa < 0$ et $\tilde{\varkappa} \geq 0$, $F(z) = \Phi_1(z) + \Omega(z)$ et l'on prend $\beta_j = 0$. La solution existe si et seulement si les conditions (17) sont remplies et elle depende de $\tilde{\varkappa} + 1$ constantes arbitraires réelles.

d) Si $\varkappa < 0$ et $\tilde{\varkappa} < 0$, $F(z) = \Phi_1(z) + \Omega_1(z)$ et l'on prend $\beta_j = 0$ et $\tilde{\beta}_j = 0$. La solution existe et est unique si et seulement si les conditions (17) et (30) sont remplies.

Dans tous le cas la solution est bornée au voisinage des points $e_1, e_2, \cdots, e_\rho$ donnés à l'avance.

7. Les résultats obtenus ci-dessus contiennent en particulier les solutions de quelques problèmes considérés auparavant.

Soit $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 0$. Si $a(\zeta) = 1$ et $b(\zeta) = 0$ on obtient la solution du problème de Dirichlet à singularités données, [3]. Si $a(\zeta) = 1$, $b(\zeta) = 0$ sur L_{m_j}, $j = 1, 2, \cdots, p$ et $a(\zeta) = 0$, $b(\zeta) = 1$ sur les autres arcs L_j on obtient la solution d'un problème mixte traité en [4].

Si $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2(\zeta) = 1$, $b(\zeta) = 0$ sur L_{m_j} et $a(\zeta) = 0$, $b(\zeta) = 1$ sur le reste des arcs L_j on obtient la solution d'une autre problème mixte considéré en [5].

Remarquons, en terminant, qu'on peut utiliser une méthode analogue pour résoudre le problème ci-dessus dans le cas du plan muni de coupures rectilignes alignées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. I. MUSCHELISCHWILI (1965) - *Singuläre Integralgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin.
[2] S. GOGONEA (1969) - « Rendiconti dei Lincei », *46*, 5, 526-529.
[3] S. GOGONEA (1970) - « Revue Roum. Math. Pures et Appl. », *15*, 6, 825-835.
[4] S. GOGONEA (1971) - « Revue Roum. Math. Pures et Appl. », *16*, 6, 849-864.
[5] S. GOGONEA (1972) - « Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S. de Roumanie », *15* (63), 2, 153-169.