Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Pasquale Buonocore

Esistenza e unicità in un semispazio per problemi normali relativi a sistemi quasi—ellittici t-omogenei con coefficienti costanti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.1-2, p. 19–26.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_1-2_19_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Equazioni a derivate parziali. — *Esistenza e unicità in un semispazio per problemi normali relativi a sistemi quasi–ellittici t–omogenei con coefficienti costanti* (*). Nota (**) di PASQUALE BUONOCORE, presentata dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — We state an existence and uniqueness theorem for the problems in the title.

Per una classe di sistemi ellittici del tipo di Petrowsky, G. Geymonat [3] ha introdotto la nozione di operatore al contorno di Dirichlet e di *operatore normale* stabilendo, fra l'altro, la relativa formula di Green.

D'altra parte T. Bruno ha considerato (1), per i sistemi quasi–ellittici lineari introdotti da L. R. Volevich [9], i problemi in un semispazio verificanti la *condizione complementare* provando, fra l'altro, le maggiorazioni a priori delle soluzioni di essi.

Limitandomi a considerare il caso dei coefficienti costanti, ho stabilito per tali problemi generali le maggiorazioni a priori concernenti l'operatore aggiunto funzionale (Teorema 1); quindi, in riferimento ai sistemi quasi–ellittici che sono la naturale generalizzazione dei sistemi ellittici considerati in [3], ho esteso la nozione di operatore al contorno *normale* e, relativamente ad una classe di problemi per cui si ha l'unicità, ho applicato classici procedimenti esistenziali (cfr. [6]), dopo aver esteso la formula di Green (Teorema 2) e un risultato di regolarizzazione (Teorema 3).

1. – Un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti reali o complessi

$$(1) \qquad A(D)\,u \doteq \{p_{kj}(D)\,u_j\} \;,\; p_{kj}(D) = \sum_{\langle\alpha,q\rangle \le m_{kj}} a_{kj\alpha} D^\alpha \quad k,j = 1,\cdots,N \;;\; N \in \mathfrak{N}^{(2)}$$

$$u = (u_1,\cdots,u_N) \quad ; \quad \alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \in \mathfrak{N}_0^n \;;$$

$$D^\alpha = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \; (i^2 = -1) \;,\; |\alpha| = \sum_{h=1}^n \alpha_h \;;$$

$$x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathfrak{R}^n \quad ; \quad q = (q_1,\cdots,q_n) \in \mathfrak{Q}_+^n \;;$$

$$\langle\alpha\,,q\rangle = \alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_n q_n \;;$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1977.

(1) In un lavoro che sarà presentato prossimamente per la pubblicazione su Ricerche di Matematica: *Sistemi quasi–ellittici e classi di Gevrey*.

(2) Qui, come nel seguito, si conviene di sommare sugli indici ripetuti in una stessa espressione monomia, al variare degli stessi negli insiemi indicati.

si dice *quasi-ellittico* con *peso* q e di *q-ordine* m se il polinomio

$$\mathrm{P}(\xi) = \det \| p_{kj}(\xi) \| \qquad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) = (\xi', \xi_n) \in \mathfrak{R}^n$$

è quasi-ellittico con peso q e q-grado m [3] e se inoltre si ha:

$$m = \max_{\beta} (m_{1\beta_1} + \cdots + m_{\mathrm{N}\beta_\mathrm{N}})$$

ove $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_\mathrm{N})$ è una permutazione degli indici $1, \cdots, \mathrm{N}$.

Esistono $2\mathrm{N}$ numeri razionali non negativi (*potenziali*)

$$t_1, \cdots, t_\mathrm{N}, \quad s_1, \cdots, s_\mathrm{N} \qquad \min_k s_k = 0$$

tali che

$$m_{kj} \leq t_j - s_k \text{ se } t_j - s_k \geq 0, \quad p_{kj}(\xi) = 0 \text{ se } t_j - s_k < 0, \quad \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} (t_k - s_k) = m \,^{(4)};$$

inoltre, posto:

$$p'_{kj}(\xi) = \begin{cases} p^0_{kj}(\xi) & \text{se} \quad t_j - s_k \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t_j - s_k < 0 \end{cases}$$

si ha:

$$\det \| p'_{kj}(\xi) \| = \mathrm{P}^0(\xi).$$

Supponiamo che anche nel caso $n = 2$ sia verificata la condizione:

(1) *Per ogni* $\xi' \in \mathfrak{R}^{n-1} - \{0\}$ *risulta costante il numero* r *delle radici* $\tau_1^+(\xi'), \cdots, \tau_r^+(\xi')$ *con parte immaginaria positiva dell'equazione*

$$\mathrm{P}^0(\xi', \tau) = 0 \qquad \tau \in \mathfrak{C}.$$

Si consideri ora il sistema di operatori lineari di frontiera a coefficienti costanti, reali o complessi:

$$\mathrm{B}(\mathrm{D})\, u = \{\mathrm{B}_{hj}(\mathrm{D})\, u_j\}, \quad \mathrm{B}_{hj}(\mathrm{D}) = \sum_{\langle\alpha, q\rangle \leq \mu_{hj}} b_{hj\alpha} \mathrm{D}^\alpha \tag{2}$$

$$h = 1, \cdots, r; \; j = 1, \cdots, \mathrm{N}.$$

(3) Ricordiamo che un polinomio

$$\mathscr{P}(\xi) = \sum_{\langle\alpha, q\rangle \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \qquad a_\alpha \in \mathfrak{C}$$

è detto *quasi-ellittico* con *peso* q e di *q-grado* m se la sua *q-parte principale*

$$\mathscr{P}^0(\xi) = \sum_{\langle\alpha, q\rangle = m} a_\alpha \xi^\alpha$$

verifica la seguente condizione:

$$\mathscr{P}^0(\xi) \neq 0 \qquad \forall \xi \in \mathfrak{R}^n - \{0\}.$$

(4) Si può supporre $t_j \geq q_h \;\forall_{j,h}$ perché altrimenti ci si può ricondurre ad un sistema con un minor numero di equazioni e di incognite.

Supponiamo che qualunque sia $h \in \{1, \cdots, r\}$ e $j \in \{1, \cdots, N\}$ risulti:

(3) $$\mu_{hj} \leq [t_j/q_n - 1/2]_-{}^{(5)};$$

posto $\sigma_h = \min_j (t_j - \mu_{hj})$, ovviamente si ha che $\mu_{hj} \leq t_j - \sigma_h$ e quindi:

$$B_{hj}(D) = \sum_{\langle\alpha,q\rangle \leq t_j - \sigma_h} b_{hj\alpha} D^\alpha .$$

Poniamo $B'_{hj}(\xi) = B^0_{hj}(\xi)$ e consideriamo la matrice aggiunta di $\| p'_{kj}(\xi) \|$, $\| \mathscr{P}'_{js}(\xi) \|$ ove $s = 1, \cdots, N$; diciamo che il sistema (2) *ricopre* il sistema (1) su $\partial \mathfrak{R}^n_+ = \{x \in \mathfrak{R}^n : x_n = 0\}$ se è verificata la seguente condizione:

(II) (CONDIZIONE COMPLEMENTARE). *Qualunque sia* $\xi' \in \mathfrak{R}^{n-1} - \{0\}$ *risultano linearmente indipendenti modulo* $(\tau - \tau_1^+), \cdots, (\tau - \tau_r^+)$ *le righe della matrice*

$$\| B'_{hj}(\xi', \tau) \mathscr{P}_{js}(\xi', \tau) \|_{hs} .$$

Denotiamo con $\tilde{u}(\xi)$ la trasformata di Fourier di $u(x)$ e con $\hat{u}(\xi', x_n)$ la trasformata parziale di Fourier di $u(x', x_n)$ rispetto a $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ introduciamo quindi alcuni noti spazi funzionali (cfr. [4], [7], [8], [11]).

Per ogni $s, r \in \mathfrak{R}$, con $H^{s,r}(\mathfrak{R}^n)$ denotiamo lo spazio delle distribuzioni temperate u su $\mathfrak{R}^n$ tali che

$$(1 + \langle\xi\rangle^2)^s (1 + \langle\xi'\rangle^2)^r \, | \tilde{u}(\xi) |^2 \in L^1(\mathfrak{R}^n),$$

ove $$\langle\xi\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} | \xi_i |^{m_i} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \langle\xi'\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n-1} | \xi_i |^{m_i} \right)^{\frac{1}{m}},$$

munito della norma

$$\| u \|_{H^{s,r}(\mathfrak{R}^n)} = \left(\int_{\mathfrak{R}^n} (1 + \langle\xi\rangle^2)^s (1 + \langle\xi'\rangle^2)^r \, | \tilde{u}(\xi) |^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Posto $\mathfrak{R}^n_+ = \{x \in \mathfrak{R}^n : x_n > 0\}$, indichiamo con $H^{s,r}_{\overline{\mathfrak{R}}^n_+}(\mathfrak{R}^n)$ il sottospazio di $H^{s,r}(\mathfrak{R}^n)$ costituito dalle distribuzioni aventi supporto contenuto in $\overline{\mathfrak{R}}^n_+$, e con $H^{s,r}(\mathfrak{R}^n_+)$ lo spazio delle distribuzioni u su $\mathfrak{R}^n_+$ che sono restrizioni a $\mathfrak{R}^n_+$ di elementi di $H^{s,r}(\mathfrak{R}^n)$, munito della norma

$$\| u \|_{H^{s,r}(\mathfrak{R}^n_+)} = \inf \| U \|_{H^{s,r}(\mathfrak{R}^n)} \qquad U = u \text{ su } \mathfrak{R}^n_+ .$$

Infine denotata con $\hat{g}(\xi')$ la trasformata di Fourier di $g(x')$, indichiamo con $H^s(\mathfrak{R}^{n-1})$, $s \in \mathfrak{R}$, lo spazio delle distribuzioni temperate g su $\mathfrak{R}^{n-1}$ tali che

$$(1 + \langle\xi'\rangle^2)^s \, | \hat{g}(\xi') |^2 \in L^1(\mathfrak{R}^{n-1})$$

munito della norma

$$\| g \|_{H^s(\mathfrak{R}^{n-1})} = \left(\int_{\mathfrak{R}^{n-1}} (1 + \langle\xi'\rangle^2)^s \, | \hat{g}(\xi') |^2 \, d\xi' \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(5) Se $t > 0$, con $[t]_-$ indichiamo il più grande intero minore di t.

Osserviamo ora che per noti risultati l'operatore

$$\mathscr{L} : u \to (p_1 (\mathrm{D}) u , \cdots , p_\mathrm{N} (\mathrm{D}) u , \mathrm{B}_1 (\mathrm{D}) u |_{x_n=0} , \cdots , \mathrm{B}_r (\mathrm{D}) u |_{x_n=0})$$

ove si è posto:

$$p_k (\mathrm{D}) u = p_{kj} (\mathrm{D}) u_j \quad , \quad \mathrm{B}_h (\mathrm{D}) u = \mathrm{B}_{hj} (\mathrm{D}) u_j ,$$

è lineare e continuo da $\prod_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}^{t_j} (\mathfrak{R}^n_+)$ in $\prod_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}^{s_k} (\mathfrak{R}^n_+) \times \prod_{h=1}^{r} \mathrm{H}^{\sigma_h - \frac{1}{2}} (\mathfrak{R}^{n-1})$, ne segue che l'operatore $\mathscr{L}^*$ aggiunto di $\mathscr{L}$, definito dalla relazione

$$\langle u , \overline{\mathscr{L}^* \mathrm{U}} \rangle = \langle \mathscr{L} u , \overline{\mathrm{U}} \rangle \quad , \quad u \in \prod_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}^{t_j} (\mathfrak{R}^n_+) ,$$

$$\mathrm{U} = (\mathrm{U}_1 , \cdots , \mathrm{U}_\mathrm{N} , g_1 , \cdots , g_r) \in \prod_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}^{-s_k}_{\overline{\mathfrak{R}}^n_+} (\mathfrak{R}^n) \times \prod_{h=1}^{r} \mathrm{H}^{-\sigma_h + \frac{1}{2} q_n} (\mathfrak{R}^{n-1})$$

è lineare e continuo da $\prod_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}^{-s_k}_{\overline{\mathfrak{R}}^n_+} (\mathfrak{R}^n) \times \prod_{h=1}^{r} \mathrm{H}^{-\sigma_h + \frac{1}{2} q_n} (\mathfrak{R}^{n-1})$ in $\prod_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}^{-t_j}_{\overline{\mathfrak{R}}^n_+} (\mathfrak{R}^n)$.

Vale il seguente teorema:

TEOREMA 1. *Se il sistema* (1) *è quasi-ellittico e verifica le condizioni* (*I*) *e* (*II*), *allora qualunque sia* $t \in \mathfrak{R}$ *e per ogni* $\mathrm{U} = (\mathrm{U}_1 , \cdots , \mathrm{U}_\mathrm{N} , g_1 , \cdots , g_r) \in \prod_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}^{-s_k , t}_{\overline{\mathfrak{R}}^n_+} (\mathfrak{R}^n) \times \prod_{h=1}^{r} \mathrm{H}^{-\sigma_h + t + \frac{1}{2} q_n} (\mathfrak{R}^{n-1})$ *sussiste la seguente limitazione*:

$$\| \mathrm{U} \|_{\prod_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}^{-s_k , t} (\mathfrak{R}^n) \times \prod_{k=1}^{r} \mathrm{H}^{-\sigma_h + t + \frac{1}{2} q_n} (\mathfrak{R}^{n-1})} \leq$$

$$\leq \mathrm{K} \left(\| \mathscr{L}^* \mathrm{U} \|_{\prod_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}^{-t_j , t} (\mathfrak{R}^n)} + \| \mathrm{U} \|_{\prod_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}^{-s_k , t-1} (\mathfrak{R}^n) \times \prod_{h=1}^{r} \mathrm{H}^{-\sigma_h + t - 1 + \frac{1}{2} q_n} (\mathfrak{R}^{n-1})} \right)$$

con K *indipendente da* U.

2. – Consideriamo ora particolari sistemi quasi-ellittici a coefficienti costanti, analoghi ai *sistemi ellittici secondo Petrowsky con unica dimensionalità t* rispetto alle funzioni incognite (nonché rispetto alle equazioni), che in analogia con una locuzione usata nel caso ellittico (cfr. [10]), diremo *t-omogenei*.

Precisamente il sistema (1), quasi-ellittico con peso q e di q-ordine m, lo diremo *t-omogeneo* se

$$\max_k m_{kj} = t \quad \forall j = 1 , \cdots , \mathrm{N} ; \qquad m = t\mathrm{N} .$$

Un siffatto sistema ha la forma:

$$\mathrm{A} (\mathrm{D}) u = \{ p_{kj} (\mathrm{D}) u_j \} = \left\{ \sum_{\langle \alpha , q \rangle \leq t} a_{kj\alpha} \mathrm{D}^\alpha u_j \right\} \qquad k , j = 1 , \cdots , \mathrm{N} \tag{4}$$

con

$$P^0(\xi) = \det \left\| \sum_{\langle\alpha, q\rangle = t} a_{kj\alpha}\, \xi^\alpha \right\| \neq 0 \qquad \forall \xi \in \mathfrak{R}^n - \{0\} ;$$

un sistema di potenziali è $\underbrace{t, \cdots, t}_{N}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{N}$; $(t/q_j \in \mathfrak{N}_0)$; porremo per comodità $t/q_n = T_n$.

Supporremo sempre verificata la condizione (I).

Per i sistemi ora introdotti consideriamo particolari problemi nel semispazio $\mathfrak{R}^n_+$ che di seguito descriviamo.

Consideriamo un sistema

$$G(D) = \| G_{hj}(D) \| \qquad h = 1, \cdots, NT_n \; ; \; j = 1, \cdots, N$$

di operatori lineari di frontiera a coefficienti costanti, ove $G_{hj}(D)$ ha *q-grado* $\leq (k-1) q_n$ se $h = (k-1) N + 1, \cdots, kN$, $k = 1, \cdots, T_n$. Si può porre $G(D) = \{G_k(D)\}_{k=1}^{T_n}$ con

$$G_k(D) = \| G_{hj}(D) \|_{hj} = \left\| \sum_{\langle\alpha, q\rangle \leq (k-1) q_n} g_{hj\alpha}\, D^\alpha \right\|_{hj}$$

$$j = 1, \cdots, N \; ; \; h = (k-1) N + 1, \cdots, kN.$$

In analogia con alcune definizioni introdotte in [3], diamo le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE. Diciamo che $G(D)$ è un *operatore di Dirichlet* se, posto

$$G_k^0(D) = \left\| \sum_{\langle\alpha, q\rangle = (k-1) q_n} g_{hj\alpha}\, D^\alpha \right\|_{hj},$$

risulta:

$$\det G_k^0(0, \cdots, 0, \xi_n) \neq 0 \qquad \forall \xi_n \in \mathfrak{R} - \{0\}, \; \forall k = 1, \cdots, T_n.$$

DEFINIZIONE. Diciamo che un operatore matriciale $B(D) = \| B_{hj}(D) \|_{\substack{h=1,\cdots,r \\ j=1,\cdots,N}}$ è un *operatore normale* se esiste un operatore di Dirichlet $G(D) = \| G_{ij}(D) \|_{\substack{i=1,\cdots,NT_n \\ j=1,\cdots,N}}$ tale che r righe della matrice $G(D)$, prese in ordine opportuno, costituiscano la matrice $B(D)$.

Osserviamo ora che dall'essere l'operatore A quasi-ellittico t-omogeneo, soddisfacente la condizione (I), segue che il suo aggiunto formale A^* è ancora quasi-ellittico t-omogeneo e verifica la condizione (I) con $NT_n - r$ al posto di r.

Ciò premesso, si estende ai problemi in esame la *formula di Green* (cfr. [3], [5], [8]), precisamente si ha:

TEOREMA 2. *Se* $B = \| B_{hj}(D) \|_{\substack{h=1,\cdots,r \\ j=1,\cdots,N}}$ *è un operatore normale ed inoltre* $C = \| C_{hj}(D) \|_{\substack{h=1,\cdots,NT_n - r \\ j=1,\cdots,N}}$ *è un operatore di frontiera tale che* $\{B\} \cup \{C\}$ *è un operatore di Dirichlet, allora esistono due operatori di frontiera*

$B' = \| B'_{hj}(D) \|_{\substack{h=1,\cdots,NT_n - r \\ j=1,\cdots,N}}$, $C' = \| C'_{hj}(D) \|_{\substack{h=1,\cdots,r \\ j=1,\cdots,N}}$ *tali che* $\{B'\} \cup \{C'\}$ *è un operatore di Dirichlet e si ha*:

$$\int_{\mathfrak{R}^n_+} (Au \cdot \bar{v} - u\,\overline{A^* v})\, dx = \int_{\mathfrak{R}^{n-1}} [Cu \cdot \overline{B' v}]_{x_n=0}\, dx' - \int_{\mathfrak{R}^{n-1}} [Bu \cdot \overline{C' v}]_{x_n=0}\, dx' .$$

Inoltre B *verifica la condizione complementare rispetto all'operatore* A *se e solo se la verifica* B' *rispetto all'operatore* A*.

Ai sistemi della forma (4) tali che $P^0(0, \cdots, 0, 1) \neq 0$ si estendono alcuni teoremi di regolarizzazione stabiliti in [2] e [8]; precisamente, utilizzando il Teorema 1, si ricava il seguente teorema:

TEOREMA 3. *Sia*

$$U = (U_1, \cdots, U_N, g_1, \cdots, g_r) \in L^2(\mathfrak{R}^n_+ ; \mathfrak{C}^N) \times \prod_{h=1}^{r} H^{-\sigma_h + \frac{1}{2} q_n}(\mathfrak{R}^{n-1})$$

e il sistema quasi-ellittico t-omogeneo (4) *soddisfi le condizioni* (I) *e* (II). *Allora se* $s \in \mathfrak{R}_+$ *è tale che* $s\nu/q_n\,[s]_+ \neq 1/2 \pmod 1$ *per* $\nu = 0, 1, \cdots, [s]_+$ (6), *risulta*:

$$\mathscr{L}^* U \in H^{s-t}_{\overline{\mathfrak{R}}^n_+}(\mathfrak{R}^n ; \mathfrak{C}^N) \Rightarrow U \in H^s(\mathfrak{R}^n_+ ; \mathfrak{C}^N) \times \prod_{h=1}^{r} H^{-\sigma_h + s + \frac{1}{2} q_n}(\mathfrak{R}^{n-1}).$$

3. Detta z una nuova variabile reale e posto $D = D_x$, $D_z = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z}$, consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\mathscr{E}^\theta(D_x, D_z)\, v = \{\mathscr{E}^\theta_{kj}(D_x, D_z)\, v_j\} = \{(p_{kj}(D) + e^{i\theta} \delta_{kj} D_z^t)\, v_j\} \qquad k, j = 1, \cdots, N$$

ove $\theta \in \mathfrak{R}$ e δ_{kj} è il simbolo di Kronecker; facciamo la seguente ipotesi:

(III). *Esiste* θ *tale che* $\mathscr{E}^\theta(D_x, D_z)$ *è quasi-ellittico t-omogeneo e soddisfa la condizione (I), inoltre il sistema di operatori di frontiera*

$$B = \| B_{hj}(D) \|_{\substack{h=1,\cdots,r \\ j=1,\cdots,N}}$$

verifica la condizione complementare rispetto ad $\mathscr{E}(D_x, D_z)$ *su* $\partial\mathfrak{R}^n_+ \times \mathfrak{R}$.

Consideriamo il problema

$$(5) \qquad \begin{gathered} u \in H^t(\mathfrak{R}^n_+ ; \mathfrak{C}^N) \quad , \quad p_{kj}(D)\, u_j + \lambda \delta_{kj} u_j = f_k \\ B_{hj}(D)\, u_j |_{x_n=0} = g_h \\ f = (f_1, \cdots, f_N) \in L^2(\mathfrak{R}^n_+ ; \mathfrak{C}^N) \quad , \quad g_h \in H^{\sigma_h - \frac{1}{2} q_n}(\mathfrak{R}^{n-1}) \end{gathered}$$

ove λ è una costante complessa.

(6) Se $s \in \mathfrak{R}_+$, con $[s]_+$ indichiamo il più piccolo intero maggiore di s.

Sussiste il seguente *teorema di unicità*:

TEOREMA 4. *Se è verificata la condizione (III), esiste una costante* $\lambda_0 \in \mathfrak{R}_+$ *tale che per ogni* $\lambda \in \mathfrak{C}$, *con* $|\lambda| \geq \lambda_0$ *ed* $\arg \lambda = \theta$, *una eventuale soluzione del problema* (5) *soddisfa la limitazione*:

$$\| u \|_{H^t(\mathfrak{R}^n_+;\mathfrak{C}^N)} \leq K \left(\| f \|_{L^2(\mathfrak{R}^n_+;\mathfrak{C}^N)} + \sum_{h=1}^{r} \| g_h \|_{H^{\sigma_h - \frac{1}{2}q_n}(\mathfrak{R}^{n-1})} \right).$$

Infine si prova il *teorema di esistenza ed unicità*:

TEOREMA 5. *Se vale la condizione (III) e* $\{B_{hj}(D)\}$ *è un operatore normale, allora esiste una costante* $\lambda_0 > 0$ *tale che per ogni* $\lambda \in \mathfrak{C}$, *con* $|\lambda| \geq \lambda_0$ *ed* $\arg \lambda = \theta$, *il problema* (5) *è univocamente risolubile qualunque siano* $f \in L^2(\mathfrak{R}^n_+ ; \mathfrak{C}^N)$ *e* $g_h \in H^{\sigma_h - \frac{1}{2}q_n}(\mathfrak{R}^{n-1})$.

La dimostrazione del Teorema 4 si ottiene applicando un noto procedimento introdotto, per le equazioni ellittiche, da S. Agmon [1] e già utilizzato per le equazioni quasi–ellittiche (cfr. [2], [8]), a partire dalle formule di maggiorazione stabilite da T. Bruno.

Per quanto riguarda la dimostrazione del Teorema 5, si utilizzano un noto teorema di J. Peetre [6] e il teorema del *codominio chiuso* di Banach, ne diamo un breve cenno.

Anzitutto si osservi che per le ipotesi fatte e tenendo conto del teorema 4, si ha che esiste λ_0 tale che per ogni $\lambda \in \mathfrak{C}$, con $|\lambda| > \lambda_0$ e $\arg \lambda = \theta$, il problema (5) e il problema

$$(6) \qquad v \in H^t(\mathfrak{R}^n_+ ; \mathfrak{C}^N) \quad , \quad p^*_{jk}(D)\, v_k + \bar{\lambda} \delta_{kj} v_k = f'_j \text{ (7)}$$

$$B'_{hj}|_{x_n=0} = g'_h$$

$$f' \in L^2(\mathfrak{R}^n_+ ; \mathfrak{C}^N) \quad , \quad g'_h \in H^{\sigma'_h - \frac{1}{2}q_n}(\mathfrak{R}^{n-1}) \quad h = 1, \cdots, NT_n - r$$

ammettono al più una soluzione.

Posto $L = A + \lambda$, consideriamo l'operatore

$$\mathscr{P} : u \to \mathscr{P}u = (Lu\,,\, B_1 u|_{x_n=0}\,, \cdots, B_r u|_{x_n=0}) \qquad B_h u = B_{hj} u_j$$

che è lineare e continuo da

$$H^t(\mathfrak{R}^n_+ ; \mathfrak{C}^N) \qquad \text{in} \qquad E = L^2(\mathfrak{R}^n_+ ; \mathfrak{C}^N) \times \prod_{h=1}^{r} H^{\sigma_h - \frac{1}{2}q_n}(\mathfrak{R}^{n-1})$$

e verifica la maggiorazione

$$\| u \|_{H^t(\mathfrak{R}^n_+;\mathfrak{C}^N)} \leq K \| \mathscr{P}u \|_E .$$

(7) $p^*_{jk}(D)$ è l'aggiunto formale di $p_{kj}(D)$.

Per i teoremi su richiamati si ha che, assegnata $F \in E$, l'equazione $\mathscr{P}u = F$ ha soluzione se e solo se

$$(F, V) = 0 \quad , \quad \forall V = (v, w_1, \cdots, w_r) \in E' : \mathscr{P}^* V = 0 \text{ (8)}$$

ove $\mathscr{P}^*$ è l'aggiunto di $\mathscr{P}$.

Si vede poi che, se $V \in E'$ è tale che $\mathscr{P}^* V = 0$, tenendo conto del Teorema 2 e del Teorema 3, nonché del teorema di unicità, risulta $V = 0$ e allora per ogni $F \in E$ l'equazione $\mathscr{P}u = F$ ammette un'unica soluzione

$$u \in H^t (\mathfrak{R}^n_+ ; \mathfrak{C}^N) .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON (1962) – *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, «Comm. Pure Appl. Math.», *15*, 119–147.

[2] V. DEL PRETE e D. FORTUNATO (1974) – *Teoremi di regolarizzazione per problemi quasi-ellittici in un semispazio ed applicazioni*, «Ricerche di Math.», *23*, 87–128.

[3] G. GEYMONAT (1965) – *Su alcuni problemi ai limiti per i sistemi lineari ellittici secondo Petrowsky*, «Le Matematiche», *20*, 211–253.

[4] L. HÖRMANDER (1963) – *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag.

[5] J. L. LIONS e E. MAGENES (1972) – *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, *1*, Springer-Verlag.

[6] J. PEETRE (1961) – *Another approach to elliptic boundary problems*, «Comm. Pure Appl. Math.», *14*, 711–731.

[7] L. N. SLOBODECKII (1958) – *Generalized Sobolev spaces and their applications to boundary problems for partial differential equations* (in russo), Leningrad «Gos. Ped. Inst. Učen Zap.», *197*, 54–112; (1966) – Trad. inglese: «Amer. Math. Soc. Transl.», (2), *57*, 207–276.

[8] M. TROISI (1971) – *Problemi al contorno con condizioni omogenee per le equazioni quasi-ellittiche*, «Ann. Mat. Pura ed Appl.», (IV), *90*, 331–412.

[9] L. R. VOLEVICH (1962) – *Proprietà locali delle soluzioni di sistemi quasi ellittici* (in russo), «Mat. Sbornik», *59*, 3–52.

[10] L. R. VOLEVICH (1965) – *Solvability of boundary problems for general elliptic systems* (in russo), «Mat. Sbornik», *68*, 373–316; (1967) – Trad. inglese: «Amer Math. Soc. Transl», (2) *67*, 182–225.

[11] L. R. VOLEVICH e B. P. PANEYAKH (1965) – *Alcuni spazi di funzioni generalizzate e teoremi di immersione* (in russo), «Usp. Mat. Nauk.», *20*, 3–74; (1965) – Trad. inglese: «Russian Math. Surveys», *20*, 1–73.

(8) Con E′ indichiamo il duale forte di E.