Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luciano Carbone

Sull'omogeneizzazione di un problema variazionale con vincoli sul gradiente

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **63** (1977), n.1-2, p. 10–14.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_63_1-2_10_0>

Calcolo delle variazioni. — *Sull'omogeneizzazione di un problema variazionale con vincoli sul gradiente* [(*)]. Nota [(**)] di LUCIANO CARBONE [(***)], presentata dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — We prove a compactness and representation theorem for the Γ-convergence of sequences of convex integral functionals of Variational Calculus with constraints on the gradient. We describe the limit problem for the Homogenization concerning functionals of such a type.

1. In [1] veniva posto un problema di omogeneizzazione del seguente tipo: la successione delle soluzioni dei problemi:

$$(j) \qquad \operatorname*{Min}_{u \in H_0^1,\, |Du(x)| \leq 1} \left[\int_Q a_{i,j}(x/\varepsilon)\, u_{x_i} u_{x_j} + \int_Q fu \right]$$

ove Du è il gradiente di u, Q è l'ipercubo unitario in R^n, $f \in L^1$ e le $a_{i,j}$ sono delle funzioni misurabili, Q-periodiche (cioè di periodo 1 in tutte le variabili) tali che:

$$\Lambda\, |\xi|^2 \geq a_{i,j}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \lambda\, |\xi|^2 ,$$

per $\varepsilon \to 0$ converge alla soluzione di:

$$(jj) \qquad \operatorname*{Min}_{u \in H_0^1,\, |Du(x)| \leq 1} \left[\int_Q q_{i,j}\, u_{x_i} u_{x_j} + \int_Q fu \right]$$

ove $D_j q_{i,j} D_i$ è l'operatore G-limite [(1)] della successione $D_j a_{i,j}(x/\varepsilon) D_i$? In caso negativo, essa converge ancora alla soluzione di un qualche problema variazionale del tipo $\operatorname*{Min}_{u \in H_0^1} \left[\int_Q \psi(Du) + \int_Q fu \right]$?

In [2] veniva data una risposta negativa alla prima questione tramite un esempio, in [3] si rispondeva, nel caso unidimensionale, positivamente alla seconda domanda e si descriveva esplicitamente la funzione ψ.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dello GNAFA-CNR.
(**) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1977.
(***) Scuola Normale Superiore, Pisa.
(1) Secondo la definizione data per esempio in [7].

In questa Nota sarà esposto un risultato, che permette di dare una risposta affermativa alla seconda domanda e di descrivere la funzione ψ anche nel caso n-dimensionale. Ad esso si perverrà tramite un procedimento sostanzialmente differente da quelli impiegati in [3].

Più precisamente, data una funzione f da R^{2n} a R tale che:

$$0 \leq f(x, z) \leq M(1 + |z|)^P), \tag{1.1}$$

$$f(x, \cdot) \text{ convessa}, \quad f(\cdot, z) \quad Q\text{–periodica},$$

ci proponiamo di provare che:

TEOREMA 1.1. *Se f soddisfa* (1.1) *ed è strettamente convessa, allora la successione delle soluzioni dei problemi*:

$$\min_{u \in H_0^1, |Du(x)| \leq 1} \left[\int_Q f(x/\varepsilon, Du) + \int_Q gu \right] \tag{i}$$

converge uniformemente alla unica soluzione del problema:

$$\min_{u \in H_0^1} \left[\int_Q \psi(Du) + \int_Q gu \right] \tag{ii}$$

per ogni $g \in L^1(Q)$, *ove*

$$\psi(\xi) = \min_{\substack{\int_Q Du = \xi, |Du(x)| \leq 1 \\ Du \text{ Q–periodico}}} \int_Q f(x, Du), \tag{1.2}$$

e i valori minimi convergono al valor minimo.

La dimostrazione utilizza procedimenti tipici della Γ–convergenza introdotta in [4]. Sarà infatti stabilito un teorema di compattezza e rappresentazione per successioni di integrali convessi del Calcolo delle Variazioni con vincoli sul gradiente rispetto alla Γ–convergenza.

Desidero ringraziare il prof. E. De Giorgi per le utili discussioni sull'argomento.

2. Ricordiamo la definizione di Γ–limite data in [5].

Se X è un insieme e d una distanza estesa (2) su X, (S, τ) uno spazio topologico, per ogni $F: S \times X \to \overline{\mathbf{R}} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ poniamo per

(2) Cioè un'applicazione di $X \times X$ in $[0, +\infty]$ simmetrica tale che $d(x, x) = 0$, e $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

$(s_0, x_0) \in S \times X$:

$$\Gamma(S^-, d^-) \lim_{\substack{s \to s_0 \\ x \to x_0}} F(s, x) = \operatorname*{Sup}_{U \in \mathscr{U}(x_0)} \operatorname*{Sup}_{T \in \tau(s_0)} \operatorname*{Inf}_{s \in T} \operatorname*{Inf}_{x \in U} F(s, x)$$

$$\Gamma(S^+, d^-) \lim_{\substack{s \to s_0 \\ x \to x_0}} F(s, x) = \operatorname*{Sup}_{U \in \mathscr{U}(x_0)} \operatorname*{Inf}_{T \in \tau(s_0)} \operatorname*{Sup}_{s \in T} \operatorname*{Inf}_{x \in U} F(s, x),$$

ove $\mathscr{U}(x_0)$ denota la famiglia degli intorni aperti di x_0 in (X, d), $\tau(s_0)$ quella di s_0 in (S, τ).

Se in (s_0, x_0) si verifica:

$$\Gamma(S^-, d^-) \lim_{\substack{s \to s_0 \\ x \to x_0}} F(s, x) = \Gamma(S^+, d^-) \lim_{\substack{s \to s_0 \\ x \to x_0}} F(s, x),$$

il loro valore comune si indica con:

$$F(s_0, x_0) = \Gamma(S, d^-) \lim_{\substack{s \to s_0 \\ x \to x_0}} F(s, x). \tag{2.1}$$

Dalla Prop. 3.1 di [4] segue che (2.1) equivale per $S = \mathbf{N}$, $F(h, x) = F_h(x)$, $F(\infty, x) = F(x)$:

(*m*) $\forall x_h \to x_0 \qquad F(x_0) \leq \lim_h{}' F_h(x_h)$,

(*mm*) $\exists x_h \to x_0$ tale che $F(x_0) = \lim_h F_h(x_h)$.

Indichiamo con $A p_n$ l'insieme degli aperti limitati di R^n e con $\mathrm{Lip}(R^n) = \mathrm{Lip}$ l'insieme delle funzioni lipschitziane su ogni compatto di R^n.

Per ogni $\Omega \in A p_n$, denoteremo con $C^0(\Omega)$ la distanza estesa:

$$(u, v) \in L^1 \times L^1 \to \operatorname*{Sup}_{x \in \Omega} | u(x) - v(x) |,$$

con $C_0^0(\Omega)$ la distanza estesa:

$$(u, v) \in L^1 \times L^1 \to \begin{cases} \operatorname*{Sup}_{x \in \Omega} | u(x) - v(x) | & \text{se} \quad \operatorname{supp}(u - v) \Subset \Omega \\ + \infty & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Prendiamo in considerazione successioni di funzioni $f_h(x, z)$, soddisfacenti le condizioni seguenti:

$$0 \leq f_h(x, z) \leq M(1 + |z|)^P), \tag{2.2}$$

$$f_h(x, \cdot) \text{ convessa } \forall x \in R^n.$$

Definiamo per ogni $u \in L^1$:

$$F_h(u, \Omega) = \begin{cases} \int_\Omega f_h(x, Du) & \text{se} \quad u \in \mathrm{Lip} \quad \text{e} \quad |Du(x)| \leq m \in R^+ \\ +\infty & \text{altrimenti} . \end{cases}$$

Sussiste il

LEMMA 2.1. *Se f_h verifica* (2.2), *per ogni* Ap_n *e ogni* $u \in C^1$ *per cui esistono tutti i limiti si ha*:

$$\Gamma(N, C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} F_h(\Omega, v) = \Gamma(N, C_0^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ v\to u}} F_h(\Omega), v)$$

e ancora il

TEOREMA 2.2. *Se f_h verifica* (2.2), *allora esistono h_r ed una funzione f, verificante* (2.2) *per* $|z| \leq m$ *e identicamente* $+\infty$ *altrimenti, tali che* $\forall \Omega \in Ap_n$ *e* $\forall u \in C^1$:

$$\int_\Omega f(x, Du) = \Gamma(N, C_0^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{r\to\infty \\ v\to u}} F_{h_r}(\Omega, v) =$$

$$= \Gamma(N, C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{r\to\infty \\ v\to u}} F_{h_r}(\Omega, v) .$$

3. Poniamo per ogni $u \in L^1$:

$$F_\varepsilon(\Omega, u) = \begin{cases} \int_\Omega f(x/\varepsilon, Du) & \text{se} \quad u \in \mathrm{Lip} \quad \text{e} \quad |Du(x)| \leq 1 \\ +\infty & \text{altrimenti} . \end{cases}$$

Si ha:

LEMMA 3.1. *Se f soddisfa* (1.1), *allora per ogni* $u \in C^1$ *e per ogni* $\Omega \in Ap_n$:

$$\Gamma(\mathbf{R}, C_0^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ v\to u}} F_\varepsilon(\Omega, v) = \int_\Omega \psi(Du) ,$$

ove ψ è la funzione convessa s.c.i. definita dalla relazione (1.2).

Tale funzione è strettamente convessa, se lo è f.

Infine si ha:

LEMMA 3.2. *Se f soddisfa* (1.1) *allora* $\forall u \in Lip$ *e* $\forall \Omega \in Ap_n$ *si ha*:

$$\Gamma(\mathbf{R}, C_0^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ v\to u}} F_\varepsilon(\Omega, v) = \Gamma(\mathbf{R}, C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ v\to u}} F_\varepsilon(\Omega, v) =$$

$$= F(\Omega, u) = \int_\Omega \psi(Du) .$$

Dal Lemma 3.2, tramite le condizioni equivalenti (m) ed (mm) segue subito il Teorema 1.1. Infatti se u_{ε_h} è una successione di soluzioni di (i), essa è precompatta rispetto a C^0. Sia $\tilde{u}$ un suo limite; si avrà $\left(\text{passando a sottoestratte ed osservando che se } v_h \to v \text{ in } C^0 \text{ allora } \int_\Omega v_h g \to \int_\Omega vg\right)$ per (m):

$$\lim{}' \left[F_{\varepsilon_h}(Q, u_{\varepsilon_h}) + \int_Q g u_{\varepsilon_h} \right] \geq F(Q, \tilde{u}) + \int_Q g\tilde{u}.$$

D'altro canto, per (mm), esiste una successione $u^0_{\varepsilon_h}$ convergente in C^0_0 ad u, ove u è l'unico punto di minimo di (ii), per cui:

$$F(Q, u) + \int_Q gu = \lim \left[F_{\varepsilon_h}(Q, u^0_{\varepsilon_h}) + \int_Q g u^0_{\varepsilon_h} \right] \geq$$

$$\geq \lim{}' \left[F_{\varepsilon_h}(Q, u_{\varepsilon_h}) + \int_Q g u_{\varepsilon_h} \right] \geq F(Q, \tilde{u}) + g\tilde{u}.$$

Da ciò si deduce:

$$F(Q, \tilde{u}) + \int_Q g\tilde{u} = F(Q, u) + \int_Q gu, \qquad \tilde{u} = u,$$

e

$$\lim \left[F_{\varepsilon_h}(Q, u_{\varepsilon_h}) + \int_Q g u_{\varepsilon_h} \right] = F(Q, u) + \int_Q gu.$$

Le dimostrazioni dei precedenti risultati appariranno in un lavoro di prossima pubblicazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS and G. PAPANICOLAOU - *Some asymptotic results for solution of variational inequalities with higly oscillating periodic coefficients*, di prossima pubblicazione.

[2] L. CARBONE - *Sur la Γ^--convergence des integrales du type de l'énergie sur des fonctions à gradient borné*, J. Math. pures et appl., 56, 1977, 79–84.

[3] L. CARBONE - *Γ^--convergence d'integrales sur des fonctions avec des contraintes sur le gradient et des obstacles*, Comm. in partial differential equations, 2 (6), 1977, 627–651.

[4] E. DE GIORGI e T. FRANZONI (1975) - *Su un tipo di convergenza variazionale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei Roma », *63*, 6, 842–850.

[5] E. DE GIORGI (1977) - *Γ-convergenza e G-convergenza*, « Boll. Un. Mat. Ital. », *14* A, 213–220.

[6] P. MARCELLINI - *Periodic solutions and homogenization of nonlinear variational problems*, di prossima pubblicazione su Ann. Mat. Pura Appl.

[7] S. SPAGNOLO (1976) - *Convergence in energy for Elliptic Operators*, Numerical Solution of Partial Differential Equations. III Maryland, Accademic Press, 469–498.