Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franco Algostino

Sugli stati di strato limite nei gusci

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.6, p. 791–796.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_6_791_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Meccanica. — *Sugli stati di strato limite nei gusci.* Nota di FRANCO ALGOSTINO (*), presentata (**) dal Socio P. CICALA.

SUMMARY. — Asymptotic approach is used to investigate stress states in shells whose length of variation in terms of one coordinate is small as thickness. In addition to known systems for boundary layer states, a set of eight equations apt to represent load, not edge effects, is found.

INTRODUZIONE

La teoria delle strutture a guscio fondata sull'ipotesi di conservazione delle normali conduce ad un sistema differenziale di ottavo ordine. La trattazione asintotica, che di quell'ipotesi non si vale, porta a distinguere varie classi di soluzioni: però, anche, per questa via, quando si tralascino gli stati di tensione con indice di variazione 1 (secondo la denominazione di Goldenveizer), i sistemi differenziali che intervengono nella costruzione dello stato risultante, complessivamente raggiungono l'ordine 8. Alla stessa conclusione si arriva per il guscio piatto e, in particolare, per la parete piana, ove si associno gli stati estensionali e quelli flessionali.

A completare l'esame della situazione al contorno vanno considerati gli stati di indice 1, detti di strato limite. Per la piastra alcuni tipi di questi stati vennero individuati da Reissner [1] e da Friedericks e Dressler [2] e per il guscio cilindrico da Reiss [3]. Per la struttura a guscio generica si distinguono 4 tipi di tali soluzioni [4]. Nella trattazione bidimensionale essi sono retti da un sistema differenziale di dimensioni infinite. Peraltro, per via asintotica, la risoluzione è ricondotta all'esame di un problema tridimensionale assai semplice: su questa base di prima approssimazione si determinano facilmente i caratteri essenziali di questi stati.

Nella formulazione menzionata, introdotto il parametro δ, rapporto fra lo spessore h e una lunghezza L di riferimento, per ciascun tipo di soluzione si ha una classificazione delle incognite, data dagli esponenti μ delle potenze di δ che, per $\delta \rightarrow 0$, definiscono gli ordini di grandezza della variabili V, componenti di spostamento e di tensione. Secondo quanto suggerito da Cicala [5] tali classificazioni possono trovarsi introducendo termini noti unitari nel sistema di equazioni algebriche che dalle differenziali si ottengono trattando le derivazioni rispetto alle coordinate come fattori di prestabilito ordine di grandezza. Così, dalla matrice [A] dei coefficienti del sistema si passa alla matrice [a] che ne contiene gli esponenti sulla base δ: da questa, con l'uso del programma di calcolo della Nota [6], si ottiene la matrice [$\bar{a}$] degli esponenti

(*) Politecnico di Torino.
(**) Nella seduta del 23 giugno 1977.

μ per gli elementi della matrice $[A]^{-1}$. I tipi di soluzioni sono tanti quanti i gruppi di colonne uguali nella matrice $[\bar{a}]$. Le corrispondenti equazioni, ridotte ai termini fondamentali, formano, per ciascun gruppo un sistema « parziale », atto al calcolo di prima approssimazione di altrettante incognite. Tali concetti sono qui adoperati per lo studio degli stati di tensione con indice di variazione 1 secondo un sistema di linee coordinate sulla superficie media e zero sulle traiettorie ortogonali.

Struttura della matrice d'esponenti del sistema

Si consideri una parete piana riferita alle coordinate cartesiane ortogonali $\xi_1 , \xi_2 , \zeta : \zeta$ corra normalmente al piano medio, da $-h/2$ a $h/2$. Il materiale sia elastico, omogeneo e isotropo con modulo tangenziale G e coefficiente di Poisson ν. Siano hu_1 , hu_2 , hu_3 le componenti di spostamento secondo i tre assi, $G\sigma_{ij}$ le componenti di tensione. Indicando con $\partial_1 , \partial_2 , \partial_3$ le derivazioni rispetto alle coordinate, si scrivono le equazioni di equilibrio in assenza di carichi

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} = 0 , \tag{1}$$

$$\partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{23} = 0 , \tag{2}$$

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} + \partial_3 \sigma_{33} = 0 \tag{3}$$

e le relazioni di elasticità, aggruppate come segue

$$\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33} = 2h(1+\nu)\,\partial_1 u_1 , \tag{4}$$

$$\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33} = 2h(1+\nu)\,\partial_2 u_2 , \tag{5}$$

$$\sigma_{12} = h\partial_1 u_2 + h\partial_2 u_1 \tag{6}$$

$$\sigma_{13} = h\partial_1 u_3 + h\partial_3 u_1 , \tag{7}$$

$$\sigma_{23} = h\partial_2 u_3 + h\partial_3 u_2 , \tag{8}$$

$$\sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} = 2h(1+\nu)\,\partial_3 u_3 . \tag{9}$$

Le nove variabili vengono sviluppate in serie di Legendre

$$V_j = \Sigma V_{i\cdot j} \cdot \zeta_j \tag{10}$$

essendo $V_{i\cdot j}$ funzione di ξ_1 , ξ_2 e ζ_j il polinomio P_j di argomento $2\,\zeta/h$.

Si considerano le soluzioni per le quali è

$$\partial_1 V , \partial_3 V \approx V/h \quad ; \quad \partial_2 V \approx V/L \tag{11}$$

indicandosi con $\approx$ l'eguaglianza di ordini di grandezza.

Si indica con $(\mathrm{E}_1)_j$ l'equazione

$$\int_h (\zeta_j - \zeta_{i-2})\,(\underline{1})\, d\zeta = 0 \tag{12}$$

essendo $(\underline{1})$ l'espressione a primo membro della (1) e l'integrazione essendo estesa da $-h/2$ a $h/2$. Poiché h si suppone costante, tenendo conto delle proprietà dei polinomi P e limitandosi ad indicare gli ordini di grandezza dei coefficienti dei vari termini, incluse le derivazioni, si trova che la (12) si traduce in una relazione del tipo

$$(\sigma_{11\cdot j}\,,\,\sigma_{11\cdot j-2}\,,\,\sigma_{13\cdot j-1})\,\delta^0 + (\sigma_{12\cdot j}\,,\,\sigma_{12\cdot j-2})\,\delta = 0\,. \tag{13}$$

La fig. 1, ricavata dal Rif. 5, contiene gli esponenti μ per i coefficienti del sistema caratterizzato dalle (11), per un guscio generico riferito a coordinate ortogonali sulla superficie media [1]. La terna di righe con E_j sulla testata si riferisce alle equazioni ottenute mediante la trasformazione (12) dalle con-

	U_0	S_0	T_0	U_1	S_1	T_1	U_2	S_2	T_2	U_3	S_3	T_3	U_4	S_4	T_4
	. . .	0 1 1	1 1 .	. . .	1 2 1	. . .	. . .	. . .	. . .						
E_0	. . .	1 1 0	1 1 .	. . .	1 2 1	. . .	. . .	. . .	. . .						
	. . .	1 1 1	0 1 .	. . .	2 2 2	. . .	. . .	. . .	. . .						
	0 1 1	0 0 2	. . 0	1 1 2	1 1 1	. . 1	. . .	2 2 2	. . 2						
I_0	1 1 1	0 0 2	. . 0	2 2 2	1 1 1	. . 1	. . .	2 2 2	. . 2						
	1 0 1	2 2 0	. . 2	1 1 2	1 1 1	. . 1	. . .	2 2 2	. . 2						
	. . .	1 2 1	0 . .	. . .	0 1 1	. . .	. . .	1 2 1	. . .						
E_1	. . .	1 2 1	. 0 .	. . .	1 1 0	. . .	. . .	1 2 1	. . .						
	. . .	2 2 2	. . 0	. . .	1 1 1	0 1 .	. . .	2 2 2	. . .						
	1 1 0	. . .	0 2 .	0 . .	. . .	1 1 .	1 1 0	. . .	0 2 .	. . .	. . .	1 1 .			
N_0	1 1 1	. . .	2 0 .	. 0 .	. . .	1 1 .	1 1 1	. . .	2 0 .	. . .	. . .	1 1 .			
	. . .	0 0 2	. . 0	. . 0	1 1 1	. . 1	. . .	0 0 2	. . 0	. . .	1 1 1	. . 1			
	1 1 2	1 1 1	. . 1	0 1 1	0 0 2	. . 0	1 1 2	1 1 1	. . 1	. . .	2 2 2	. . 2			
I_1	2 2 2	1 1 1	. . 1	1 1 1	0 0 2	. . 0	2 2 2	1 1 1	. . 1	. . .	2 2 2	. . 2			
	1 1 2	1 1 1	. . 1	1 0 1	2 2 0	. . 2	1 1 2	1 1 1	. . 1	. . .	2 2 2	. . 2			
	. . .	. . .	1 1 .	. . .	1 2 1	0 . .	. . .	0 1 1	1 1 .	. . .	1 2 1	. . .			
E_2	. . .	. . .	1 1 .	. . .	1 2 1	. 0 .	. . .	1 1 0	1 1 .	. . .	1 2 1	. . .			
	. . .	. . .	. . .	. . .	2 2 2	. . 0	. . .	1 1 1	0 1 .	. . .	2 2 2	. . .			
	. . .	. . .	1 1 .	. . 0	. . .	0 2 .	0 . .	. . .	1 1 .	1 1 0	. . .	0 2 .	. . .	. . .	1 1 .
N_1	. . .	. . .	1 1 .	. . 1	. . .	2 0 .	. 0 .	. . .	1 1 .	1 1 1	. . .	2 0 .	. . .	. . .	1 1 .
	. . .	1 1 1	. . 1	. . .	0 0 2	. . 0	. . 0	1 1 1	. . 1	. . .	0 0 2	. . 0	. . .	1 1 1	. . 1
	. . .	2 2 2	. . 2	1 1 2	1 1 1	. . 1	0 1 1	0 0 2	. . 0	1 1 2	1 1 1	. . 1	. . .	2 2 2	. . 2
I_2	. . .	2 2 2	. . 2	2 2 2	1 1 1	. . 1	1 1 1	0 0 2	. . 0	2 2 2	1 1 1	. . 1	. . .	2 2 2	. . 2
	. . .	2 2 2	. . 2	1 1 2	1 1 1	. . 1	1 0 1	2 2 0	. . 2	1 1 2	1 1 1	. . 1	. . .	2 2 2	. . 2
	. . .	1 2 1	. . .	. . .	0 1 1	1 1 .	. . .	1 2 1	0 . .	. . .	0 1 1	1 1 .	. . .	1 2 1	. . .
E_3	. . .	1 2 1	. . .	. . .	1 1 0	1 1 .	. . .	1 2 1	. 0 .	. . .	1 1 0	1 1 .	. . .	1 2 1	. . .
	. . .	2 2 2	. . .	. . .	1 1 1	0 1 .	. . .	2 2 2	. . 0	. . .	1 1 1	0 1 .	. . .	2 2 2	. . .
	. . .	. . .	2 2 .	. . .	. . .	1 1 .	1 1 0	. . .	0 2 .	0 . .	. . .	1 1 .	1 1 0	. . .	0 2 .
N_2	. . .	. . .	2 2 .	. . .	. . .	1 1 .	1 1 1	. . .	2 0 .	. 0 .	. . .	1 1 .	1 1 1	. . .	2 0 .
	. . .	2 2 2	. . 2	. . .	1 1 1	. . 1	. . .	0 0 2	. . 0	. . 0	1 1 1	. . 1	. . .	0 0 2	. . 0
	. . .	3 3 3	. . 3	. . .	2 2 2	. . 2	1 1 2	1 1 1	. . 1	0 1 1	0 0 2	. . 0	1 1 2	1 1 1	. . 1
I_3	. . .	3 3 3	. . 3	. . .	2 2 2	. . 2	2 2 2	1 1 1	. . 1	1 1 1	0 0 2	. . 0	2 2 2	1 1 1	. . 1
	. . .	3 3 3	. . 3	. . .	2 2 2	. . 2	1 1 2	1 1 1	. . 1	1 0 1	2 2 0	. . 2	1 1 2	1 1 1	. . 1
	. . .	. . .	. . .	. . .	1 2 1	. . .	. . .	0 1 1	1 1 .	. . .	1 2 1	0 . .	. . .	0 1 1	1 1 .
E_4	. . .	. . .	. . .	. . .	1 2 1	. . .	. . .	1 1 0	1 1 .	. . .	1 2 1	. 0 .	. . .	1 1 0	1 1 .
	. . .	. . .	. . .	. . .	2 2 2	. . .	. . .	1 1 1	0 1 .	. . .	2 2 2	. . 0	. . .	1 1 1	0 1 .
	1 1 1	1 1 1	1 0 1	1 0 1	1 1 0	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 0 1	1 0 1	1 1 0	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 0 1

Fig. 1.

(1) I termini nulli ($\mu = \infty$) sono segnati con un punto.

dizioni d'equilibrio corrispondenti alle (1)–(3). I valori μ relativi alle componenti di tensione analoghe a $\sigma_{11\cdot j}$, $\sigma_{22\cdot j}$, $\sigma_{12\cdot j}$ stanno nelle colonne sotto S_j, quelli per $\sigma_{13\cdot j}$, $\sigma_{23\cdot j}$, $\sigma_{33\cdot j}$ nelle colonne T_j. Nella prima riga delle E_{11} si ritrovano i termini della (13) insieme con i molti che la curvatura della parete vi introduce. Si noti che per $j = 0, 1, 2$ i polinomi a fattore sono ridotti a ζ_0, ζ_1, ζ_2: nell'integrazione relativa a σ_{13} si tenga presente che questa tensione si annulla per $\zeta = \pm h/2$.

Dalle (4)–(6), moltiplicando per ζ_j/h e integrando nello spessore si ricavano le relazioni del gruppo I_j: così per la $(I_1)_j$ si ha

$$(\sigma_{11\cdot j}, \sigma_{22\cdot j}, \sigma_{33\cdot j}, u_{1\cdot j})\, \delta^0 = 0 . \tag{14}$$

I valori di μ relativi alle componenti di spostamento $u_{1\cdot j}$, $u_{2\cdot j}$, $u_{3\cdot j}$ sono riportati nelle colonne U_j. Le equazioni della terna N_j sono ottenute per integrazione delle eguaglianze (7)–(9) moltiplicate per $\zeta_j - \zeta_{j+2}$. Si ha così per l'equazione $(N_1)_j$

$$(\sigma_{13\cdot j}, \sigma_{13\cdot j+2}, u_{3\cdot j+2}, u_{1\cdot j+1})\, \delta^0 = 0 . \tag{15}$$

Osservando nella fig. 1 i blocchi 9×9 lungo la diagonale se ne nota la formazione ripetitiva a partire dal 7° elemento diagonale. Per le sottomatrici adiacenti, la ripetizione si presenta da posizioni sempre più avanzate al crescere della distanza dalla diagonale.

La matrice d'esponenti per la reciproca del sistema

La fig. 2 mostra la trasposta della matrice $[\bar{a}]$, modificata mediante aggruppamento di righe e colonne uguali. Ciascuna delle prime 8 righe corrisponde all'equazione indicata a sinistra. Le ultime 4 corrispondono a gruppi infiniti

	$\sigma_{11.0}$	$\sigma_{12.0}$	$\sigma_{13.0}$	$\sigma_{11.1}$	$u_{1.0}$	$u_{2.0}$	$u_{3.0}$	$u_{1.1}$	G_{11}	G_{12}	G_{21}	G_{22}
$(E_1)_0$	$\underline{0}$	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
$(E_2)_0$	1	$\underline{0}$	1	1	1	0	1	1	1	2	1	1
$(E_3)_0$	1	1	$\underline{0}$	0	1	1	0	0	1	1	1	0
$(E_1)_1$	1	1	2	$\underline{0}$	1	1	0	0	1	1	1	0
$(I_1)_0$	2	2	2	2	$\underline{0}$	1	1	1	1	2	1	2
$(I_3)_0$	2	2	2	2	1	$\underline{0}$	1	1	1	2	1	2
$(N_1)_0$	2	2	2	2	1	1	$\underline{0}$	2	1	2	1	2
$(I_1)_1$	2	2	2	2	1	1	0	$\underline{0}$	1	1	1	1
E_{11}	1	1	1	1	1	1	1	1	$\underline{0}$	1	1	1
E_{12}	2	2	2	1	1	2	1	1	1	$\underline{0}$	1	1
E_{21}	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	$\underline{0}$	1
E_{22}	2	2	2	1	1	1	0	0	1	1	1	$\underline{0}$

Fig. 2.

di equazioni, e precisamente: E_{11} rappresenta le equazioni $(N_2)_j$, $(E_2)_{j+1}$, $(I_3)_{j+1}$ per $j \geq 0$ pari, E_{12} le anzidette equazioni per $j \geq 1$ dispari, E_{21} le equazioni $(I_2)_j$, $(N_3)_j$, $(E_3)_{j+1}$, $(N_1)_{j+1}$, $(E_1)_{j+2}$, $(I_1)_{j+2}$ per $j \geq 0$ pari, E_{22} le medesime per $j \geq 1$ dispari. Nelle colonne sono segnati gli esponenti di ordine di grandezza per le variabili: nelle prime 8 per le variabili scritte in alto. Seguono i gruppi di incognite:

$$\sigma_{23\cdot j}\,,\ u_{2\cdot j+1}\,\sigma_{12\cdot j+1} = G_{11} \quad \text{per} \quad j \geq 0 \text{ pari}, \qquad = G_{12} \quad \text{per} \quad j \geq 1 \text{ dispari}$$

$$\sigma_{22\cdot j}\,,\ \sigma_{33\cdot j}\,,\ u_{13\cdot j+1}\,,\ \sigma_{13j+1}\,,\ u_{1\cdot j+2}\,,\ \sigma_{11\cdot j+2} = G_{21} \quad \text{per} \quad j \geq 0 \text{ pari}, \qquad = G_{22} \quad \text{per } j \geq 1 \text{ dispari}.$$

I valori μ sottolineati indicano la composizione dei sistemi parziali.

Nella fig. 1 sotto la punteggiata è segnata la classificazione della riga E_{11} di fig. 2. Sono distinti con circolo i termini fondamentali di ciascuna equazione e con segno speciale quelli del sistema parziale. Si riconosce che questi corrispondono mediante trasformazioni del tipo (12) al sistema

$$(16) \qquad \partial_1 \sigma_{12} = -\partial_3 \sigma_{23} \quad , \quad \sigma_{12} = h\partial_1 u_2 \quad , \quad \sigma_{23} = h\partial_3 u_2$$

che sono le equazioni (2), (6), (8), ridotte in base alla classificazione. È noto che uno stato di tensione di questo tipo nasce dall'applicazione sull'orlo $\xi_1 =$ = costante di momenti di torsione M_{12} e sforzi taglianti trasversali Q_1 combinati in modo da annullare il taglio di Kirchhoff $Q_1 + \partial_2 M_{12}$.

Allo stesso sistema (16), risultante nell'equazione $(\partial_1^2 + \partial_3^2)\,\sigma_{23} = 0$ conduce il sistema parziale delle E_{12}, che rappresenta stati simmetrici rispetto al piano $\zeta = 0$, rispetto al quale quelli delle E_{11} sono antimetrici.

È anche noto che i sistemi parziali E_{21}, relativo a stati simmetrici, e E_{22}, relativo ad antimetrici, si esprimono nelle equazioni

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\partial_1 \sigma_{11} = -\partial_3 \sigma_{13} \;,\; \sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33} = 2(1+\nu)\,h\partial_1 u_1 \;,\; \sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33} = 0 \\ &\partial_1 \sigma_{13} = -\partial_3 \sigma_{33} \;,\; \sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} = 2(1+\nu)\,h\partial_3 u_3 \;,\; \sigma_{13} = h\partial_1 u_3 + h\partial_3 u_1 \end{aligned}$$

che sono le (1), (4), (5), (3), (9), (7) ridotte: l'equazione risultante può scriversi

$$(\partial_1^2 + \partial_3^2)^2\,\sigma_{33} = 0\,.$$

I sistemi parziali relativi alle prime 8 righe di fig. 2 si riducono, ciascuno, ad un'equazione in una delle variabili segnate in alto. Così la $(E_2)_0$ assume la forma

$$(18) \qquad \partial_1 \sigma_{12\cdot 0} + q_2 = 0$$

essendo q_2 il carico nella direzione ξ_2, costante secondo ζ e rapidamente variabile in funzione di ξ_1. Analogamente, col termine di carico in $(I_3)_0$, questa assume la forma

$$(19) \qquad \partial_1 u_{2\cdot 0} + d_2 = 0$$

essendo d_2 una dislocazione di scorrimento avente gli stessi caratteri di q_2.

Conclusioni

L'esame dei sistemi parziali di equazioni differenziali, rivelati dal procedimento asintotico, ha confermato i risultati di precedenti indagini. In aggiunta si è trovata una chiara delimitazione dei gruppi di incognite ed equazioni per le soluzioni di strato limite. È risultato infatti che 8 equazioni si staccano nettamente dai successivi sistemi infiniti, con una propria classificazione delle variabili. Le incognite che separatamente appaiono in queste equazioni rappresentano, nella forma adimensionale qui adottata, le 4 caratteristiche di sollecitazione e le 4 di spostamento che entrano nelle condizioni al contorno per il sistema di 8° ordine che governa le altre classi di soluzioni. Queste equazioni, aventi la forma delle (18), (19), non forniscono soluzioni omogenee atte a rappresentare gli effetti di orlo: la serie degli stati di strato limite che, in prima approssimazione, si ricava dai sistemi (16) e (17) va completata con l'aggiunta degli stati che più profondamente penetrano nella parete, retti da sistemi di ottavo ordine nel loro complesso.

Riferimenti

[1] E. Reissner (1945) - *The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plates*, « J. Appl. Mech. », 68-78.
[2] K. O. Friedericks e R. F. Dressler (1961) - *A boundary layer theory for elastic plates*, « Comment. Pure Appl. Math. », 1-33.
[3] E. L. Reiss (1962) - *On the theory of cylindrical shells*, « Quart. J. Mech Appl. Math. », 325-338.
[4] P. Cicala (1962) - *Su certi stati di tensione nella parete sottile elastica*, « Atti Acc. Scienze Torino », 239-253.
[5] P. Cicala (1977) - *Asymptotic approach to linear shell theory*, « AIMETA Res. Rep. », 6, p. 130.
[6] F. Algostino e G. F. Del Col - *Sistemi lineari con un parametro tendente a zero* (in corso di stampa).