Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Andrea Del Centina

Osservazioni sulla varietà di $\mathbf{P}^{g-1}(K)$ su cui giace la curva canonica di una curva k-gonale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.6, p. 755–759.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_6_755_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Geometria. — *Osservazioni sulla varietà di* $\mathbf{P}^{g-1}$ (K) *su cui giace la curva canonica di una curva k–gonale* (*). Nota di ANDREA DEL CENTINA, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper some questions about the variety Φ of $\mathrm{P}^{g-1}(k)$ on which lies the canonical curve of a k-gonal curve, are studied.

1. Sia C una curva algebrica irriducibile completa di genere g su un campo K algebricamente chiuso.

La curva C è detta k–gonale (cfr. [2], [3]) se contiene (almeno) una serie lineare g_k^1 ma non contiene serie lineari di dimensione 1 e grado minore di k.

Le curve 2–gonali sono le curve iperellittiche.

Risulta subito che la g_k^1 è completa e senza punti fissi.

Nel seguito supporremo sempre $k \leq g - 1$, così la g_k^1 risulterà speciale; supporremo anche C non iperellittica ($k > 2$) e $g \geq 4$.

Nelle ipotesi precedenti la curva canonica Γ di C giace su una varietà Φ di dimensione $k - 1$ di $\mathbf{P}^{g-1}$ (K) (cfr. Lemma 6, p. 196 di [1]).

Nel caso $k = 3$ la superficie Φ ha grado $g - 2$ (cfr. [4]) allora per un teorema di Del Pezzo Φ è: o un cono su una curva razionale normale gobba, o la superficie di Veronese in $\mathbf{P}^5$ (K), oppure una rigata.

Si dimostra (cfr. ancora [4]) che se $g > 4$ allora la superficie Φ non è un cono e che se Φ è la superficie di Veronese allora $g = 6$.

In questa Nota si ottengono alcuni risultati sulla varietà Φ, analoghi ai precedenti, nel caso in cui $k > 3$.

In particolare nel n. 2 si dimostra che deg Φ = codim $\Phi + 1$ e si richiama un Teorema di Enriques che enumera in cinque tipi tutte le varietà di $\mathbf{P}^n$ (K) soddisfacenti la relazione precedente e non giacenti in alcun iperpiano di $\mathbf{P}^n$ (K) (ciò accade per la Φ).

Nel n. 3 si dimostra poi che: se $k < \frac{1}{2} g + 1$ allora la varietà Φ non è un cono sopra una curva razionale normale gobba; se Φ è un cono sulla superficie di Veronese alla $g = 7$ e $k = 4$; infine se $k < \frac{1}{2} g + 1$ Φ può essere un cono sopra una rigata razionale se e solo se la somma minima della g_k^1 e della sua residua rispetto alla serie canonica è una serie lineare di dimensione strettamente minore di $g - 1$.

2. Le ipersuperfici quadriche di $\mathbf{P}^{g-1}$ (K) contenenti Γ contengono anche Φ e tra queste, se $D \in g_k^1$ e r è l'indice di specialità di D, $\frac{1}{2} r (r - 1)$ sono linearmente indipendenti (cfr. ancora Lemma 6 di [1]).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 23 giugno 1977.

LEMMA 1. *La varietà* Φ *ha grado* $g - k + 1$.

Dimostrazione.

Poiché Φ contiene Γ, Φ non è contenuta in alcuno degli iperpiani di $\mathbf{P}^{g-1}(K)$; dunque il grado, deg Φ, di Φ è almeno $g - k + 1$. Supponiamo che deg $\Phi = d \geq g - k + 2$. Allora un sottospazio τ di $\mathbf{P}^{g-1}(K)$ di dimensione $g - k$, in posizione generica rispetto a Φ, segherà Φ in d punti distinti; se con $P_1, \cdots, P_{g-k-2}$ indichiamo $g - k - 2$ punti tra questi, la dimensione dello spazio V delle ipersuperfici quadriche di τ contenenti $P_1, \cdots, P_{g-k-2}$ è:

$$\tfrac{1}{2}(g - k + 1)(g - k + 2) - (g - k + 2).$$

D'altra parte le ipersuperfici quadriche di $\mathbf{P}^{g-1}(K)$ contenenti Φ ristrette a τ appartengono a V, dunque, poiché dal teorema di Riemann–Roch si ha $r = g - k + 1$, si dovrebbe avere:

$$\tfrac{1}{2}(g - k + 1)(g - k) \leq \tfrac{1}{2}(g - k + 1)(g - k + 2) - (g - k + 2)$$

che è assurdo.

Si conclude allora che la varietà Φ soddisfa la relazione:

$$\text{deg}\,\Phi = \text{codim}\,\Phi + 1. \tag{1}$$

Sussiste il seguente:

TEOREMA (Enriques, cfr. [3]). *Sia* X *una varietà di dimensione* ≥ 3 *in* $\mathbf{P}^n(K)$ *non contenuta in alcuno degli iperpiani di* $\mathbf{P}^n(K)$ *e tale che* deg X = codim X + 1, *allora* X *appartiene ad uno dei seguenti tipi*:

(1) *una ipersuperficie quadrica*;

(2) *una rigata razionale* (1);

(3) *un cono sopra una rigata razionale*;

(4) *un cono sopra la superficie di Veronese*;

(5) *un cono sopra una curva razionale normale gobba.*

La varietà Φ pertanto appartiene ad uno dei cinque tipi elencati nel teorema precedente.

Osservazione. Si ha immediatamente che se $k < g - 1$ allora Φ non è una ipersuperficie quadrica in $\mathbf{P}^{g-1}(K)$.

3. In questo n. si ottengono delle condizioni su k e g sotto le quali Φ appartiene o non appartiene ad uno dei tipi (2), $\cdots$, (5) del teorema precedente.

PROPOSIZIONE 1. *Se* $k < \frac{1}{2}g + 1$ *allora* Φ *non è un cono sopra una curva razionale normale gobba.*

(1) Secondo la definizione in [3], p. 607.

Dimostrazione.

Sia Φ un cono di vertice V sopra una curva razionale normale gobba di grado $g-k+1$ e sia $\tilde{\Phi}$ la varietà ottenuta da Φ mediante una trasformazione monoidale di centro V. Sia $\tilde{\Gamma}$ la trasformata propria di Γ, $\tilde{\Gamma}$ è isomorfa a Γ; sia S il divisore eccezionale dello scoppiamento.

La trasformata propria della rigatura di Φ induce una rigatura π su $\tilde{\Phi}$. Posto d il grado di $\pi_{|\tilde{\Gamma}}$ dovrà essere $d \geq k$.

Siano $P_1, \cdots, P_{g-k+1}$ $g-k+1$ punti in posizione generica su Γ e sia H l'iperpiano generato dai suddetti punti e da V. Poiché H taglia su Γ un divisore canonico si dovrà avere:

$$2g-2 = d(g-k+1). \tag{2}$$

Si osservi che, non avendo la g_k^1 punti fissi, $S \cap \tilde{\Gamma} = \varnothing$.

La (2) è assurda se $k < \frac{1}{2}g+1$.

Osservazione. Se $k < \frac{1}{2}g+1$ la curva C è a moduli particolari (cfr. [5]). Supporremo d'ora in avanti $k < \frac{1}{2}g+1$.

PROPOSIZIONE 2. *Se Φ è un cono sulla superficie di Veronese allora $g = 7$ e $k = 4$.*

Dimostrazione.

Un sottospazio di dimensione $g-k$ di $\mathbf{P}^{g-1}$(K) in posizione generica rispetto a Φ taglia Φ in una superficie di grado $g-k+1$ che deve essere la superficie di Veronese, allora $g-k+1 = 4$; tenendo conto che $k < \frac{1}{2}g+1$ si ottiene subito $g = 7$ e $k = 4$.

Un esempio. Un esempio di curva di genere 7 dotata di una g_4^1 si può ottenere come segue: siano Q e F rispettivamente una quadrica non singolare e una quartica non singolare in $\mathbf{P}^3$(K), Q e F siano inoltre tali che $Q \cap F$ abbia due punti doppi; la normalizzata di $Q \cap F$ è una curva di genere 7 che possiede due serie lineari g_4^1 distinte, quelle tagliate su di essa dai due sistemi di rette di Q.

Con le notazioni di [6] sia J_k la varietà dei fasci invertibili di grado k su C (non necessariamente k-gonale) e $W_k \subset J_k$ sia il luogo dei fasci invertibili di grado k con sezioni, sia inoltre $W_k^1 = \{L \in W_k \mid h^0(L) \geq 2\}$.

Per L generico in W_k^1 si ha $h^0(L) = 2$.

Sia V l'immagine dell'accoppiamento

$$H^0(L) \otimes H^0(\Omega \otimes L^{-1}) \to H^0(\Omega)$$

dove Ω è il fascio canonico su C.

LEMMA 2. $\dim V = 2(g-k+1) - h^0(\Omega \otimes L^{-2})$.

Dimostrazione.

Per il teorema di Riemann–Roch si ha $h^0(\Omega \otimes L^{-1}) = g - k + 1$ e se $\alpha, \beta \in H^0(L)$ costituiscono una base per $H^0(L)$ (quindi prive di zeri comuni) dalla successione esatta

$$0 \to \alpha \otimes \beta \otimes H^0(\Omega \otimes L^{-2}) \to \alpha \otimes H^0(\Omega \otimes L^{-1}) \oplus \beta \otimes H^0(\Omega \otimes L^{-1}) \to V \to 0$$

segue la tesi [(2)].

Sia $\mathbf{P}H^0(L) = g_k^1$ una serie lineare appartenente alla curva k–gonale C, dal Lemma precedente segue immediatamente la:

PROPOSIZIONE 3. *La somma minima della g_k^1 e della sua residua rispetto alla serie canonica è una serie lineare di dimensione $2(g - k + 1) - i$, essendo i l'indice di specialità della serie doppia della g_k^1* (cfr. [5]).

Ciascuno dei divisori della g_k^1 su Γ impone $k - 1$ condizioni agli iperpiani di $\mathbf{P}^{g-1}(K)$ che debbono contenerlo, ne segue che ciascun divisore della g_k^1 è tagliato su Γ da un $\mathbf{P}^{k-2}(K)$.

L'indice di specialità i della serie doppia della g_k^1 sarà determinato dalle incidenze dei $\mathbf{P}^{k-2}(K)$ a due a due.

In particolare se due di questi $\mathbf{P}^{k-2}(K)$ hanno un $\mathbf{P}^{\sigma}(K)$ a comune appartengono ad un $\mathbf{P}^{2k-\sigma-4}(K)$ e dunque:

$$i = g - 2k + \sigma + 3 .$$

dove si pone $\sigma = -1$ se i $\mathbf{P}^{k-2}(K)$ sono a due a due sghembi.

Per quanto visto in precedenza se Φ è di tipo (2) si ha $\sigma = -1$ e se Φ è di tipo (3) si ha $\sigma \geq 0$.

Nel secondo dei casi precedenti deve essere inoltre $\sigma \leq k - 4$, infatti se fosse $\sigma = k - 3$ tagliando Φ con un $\mathbf{P}^{g-k+1}$ si otterrebbe una curva razionale normale contro l'ipotesi $k < \frac{1}{2}g + 1$.

Si ha immediatamente il seguente

COROLLARIO. *Φ è un cono sopra una rigata razionale se e solo se la somma minima della g_k^1 e della sua residua rispetto alla serie canonica ha dimensione $g - \sigma - 2$, dove σ è la dimensione del vertice di Φ.*

Osservazione. Sia Φ una rigata razionale allora (cfr. [3])

$$\Phi \cong \mathbf{P}(\mathcal{O}_{P^1} \oplus \mathcal{O}_{P^1}(m_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{P^1}(m_{k-2})) .$$

Gli interi $m_i \geq 0$ per $i = 1, \cdots, k-2$, sono invarianti birazionali della curva k–gonale C; questi invarianti sono stati considerati da A. Maroni in [2] dove l'insieme $[m_1, \cdots, m_{k-2}]$ è detto specie della curva k–gonale C.

(2) Cfr. [6].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI e A. L. MAYER (1967) - *On period relations for abelian integrals on a algebraic curve*, «Ann. Sc. Norm. Pisa», XXI.

[2] A. MARONI (1949) - *Sulle curve k-gonali*, «Ann. di Mat. Pura e Appl.», 30, IV.

[3] B. SAINT-DONAT (1974) - *Projective models of* K — 3 *surfaces*, «Am. Jour. of Math.», *96*.

[4] B. SAINT-DONAT (1973) - *On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve*, «Math. Ann.», *206*.

[5] B. SEGRE (1928) - *Sui moduli delle curve poligonali, e sopra un complemento al teorema di esistenza di Riemann*, «Math. Ann.», *100*.

[6] D. MUNFORD (1974) - *Prym varieties*, I. New York-London, Academic Press.