Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luciano Carbone, Carlo Sbordone

Un teorema di compattezza per la Γ-convergenza di funzionali non coercitivi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.6, p. 744–748.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_6_744_0>

Calcolo delle variazioni. — *Un teorema di compattezza per la Γ-convergenza di funzionali non coercitivi* (*). Nota di LUCIANO CARBONE (**) e CARLO SBORDONE (***), presentata (****) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — We prove a compactness and representation theorem for the Γ-convergence of sequences of convex integral functionals of Variational Calculus, which are not coercive and satisfy non-uniform boundedness assumptions.

1. Recentemente E. De Giorgi ha considerato una nuova nozione di convergenza per successioni di funzionali della forma:

$$F_h(\Omega, u) = \int_\Omega f_h(x, u, Du)\, dx \qquad u \in C^1(R^n) \tag{1.1}$$

con Ω aperto di R^n e $f_h(x, y, z)$ verificanti le condizioni tipo « area »

$$\begin{cases} |z| \le f_h(x, y, z) \le s(1 + |y| + |z|) \\ |f_h(x, y, z) - f_h(x, y', z')| \le s(|y - y'| + |z - z'|) \end{cases} \tag{1.2}$$

dimostrando in [3] il seguente teorema:

TEOREMA 1.1. *Se f_h è una successione di funzioni verificanti le condizioni* (1.2), *allora esistono* (h_r) *ed f verificante* (1.2), *tali che per ogni Ω aperto limitato di* R^n:

(i) $u_r \xrightarrow{L^1(\Omega)} u$, $u_r, u \in C^1 \Rightarrow \int_\Omega f(x, u, Du) \le \lim_r{}' \int_\Omega f_{h_r}(x, u_r, Du_r)$

(ii) $\forall u \in C^1\ \exists w_r \in C^1$ *tali che* $w_r - u \in C_0^1(\Omega)$, $w_r \to u$ *in* $C^0(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f(x, u, Du) = \lim_r \int_\Omega f_{h_r}(x, w_r, Dw_r).$$

Tale risultato è stato generalizzato in [7] per funzionali del tipo (1.1) con f_h integrando tale che $f_h^{1/p}$ verifica (1.2), $p \ge 1$.

Successivamente, prendendo spunto dalla problematica della teoria dello strato limite del tipo conduttanza o resistenza infinita (cfr. [6]), si sono sviluppate alcune ricerche tese ad eliminare l'ipotesi di coercitività e ad indebolire quella di crescenza controllata in (1.2).

Nel caso $p = 2$ alcuni risultati sono stati ottenuti da P. Marcellini e C. Sbordone [5], da E. De Giorgi (Corso tenuto alla Scuola Normale Superiore

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.-C.N.R.
(**) Scuola Normale Superiore, Pisa.
(***) Istituto Matematico « R. Caccioppoli », Università di Napoli.
(****) Nella seduta del 23 giugno 1977.

di Pisa nell'anno 1975–76, cfr. [1]), e, per $p = 1$ da M. Carriero e E. Pascali [2].

In questo filone di ricerche si inseriscono i risultati esposti nella presente Nota.

Prendiamo in considerazione successioni $f_h(x, z)$ di funzioni reali misurabili in R^{2n} verificanti le condizioni seguenti:

$$0 \leq f_h(x, z) \leq g_h(x)(1 + |z|^p) \tag{1.3}$$

$$|f_h^{1/p}(x, z) - f_h^{1/p}(x, z')| \leq g_h^{1/p}(x)|z - z'| \qquad \forall z, z' \in R^n \tag{1.4}$$

$$f_h(x, \cdot) \quad \text{convessa} \quad \forall x \in R^n \tag{1.5}$$

ove $p \geq 1$ e g_h è una successione di classe $L^1_{loc}(R^n)$ a integrali equilimitati ed equiassolutamente continui.

Dimostriamo tra l'altro il

TEOREMA 1.2. *Se f_h verifica* (1.3), (1.4), (1.5), *allora esistono (h_r) e $f(x, z)$ verificante* (1.3), (1.4), (1.5) *(per una opportuna g) tale che $\forall \Omega$ aperto limitato di R^n valgono* (i) *e* (ii).

Tale risultato viene provato facendo uso della teoria della Γ–convergenza.

Osserviamo che se si rinuncia all'ipotesi di equiassoluta continuità, per una successione $f_h(x, z)$ si può verificare (cfr. gli esempi del § 3) che esiste, per ogni $u \in C^1$, una successione $u_r \in C^1$ convergente ad u in $L^1(\Omega)$ tale che $\forall w_r \in C^1$ soddisfacente alle condizioni

$$w_r - u \in C^1_0(\Omega) \qquad \text{e} \qquad w_r \to u \quad \text{in} \quad C^0(\Omega)$$

risulta

$$\lim_r{}'' \int_\Omega f_{h_r}(x, Du_r) < \lim_r{}' \int_\Omega f_{h_r}(x, Dw_r) .$$

OSSERVAZIONE. La (1.5) è superflua ai fini della validità del Teorema 1.2, se f_h verifica $0 < f_h(x, z) \leq g_h(x) + |z|^p$, grazie al Coroll. 3,5 del Cap. X di [8].

2. Se X è un insieme e d una distanza estesa (1) su X, per ogni successione $F_h : X \to \bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$, poniamo per $x_0 \in X$

$$\Gamma(N^-, d^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ x \to x_0}} F_h(x) = \sup_{U \in \mathcal{U}(x_0)} \lim_h{}' \inf_U F_h$$

$$\Gamma(N^+, d^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ x \to x_0}} F_h(x) = \sup_{U \in \mathcal{U}(x_0)} \lim_h{}'' \inf_U F_h ,$$

ove $\mathcal{U}(x_0)$ denota la famiglia degli intorni aperti di x_0 in (X, d), (cfr. [1]).

(1) Cioè un'applicazione di $X \times X \to [0, +\infty]$ verificante le condizioni $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Se in x_0 si verifica

$$\Gamma(\mathrm{N}^-, d^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ x\to x_0}} \mathrm{F}_h(x) = \Gamma(\mathrm{N}^+, d^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ x\to x_0}} \mathrm{F}_h(x)$$

il loro valore comune si indicherà con

$$\mathrm{F}(x_0) = \Gamma(\mathrm{N}, d^-) \lim_{\substack{h\to\infty \\ x\to x_0}} \mathrm{F}_h(x) . \tag{2.1}$$

Ricordiamo (cfr. prop. 3.1 di [4]) che (2.1) equivale a dire

(j) $\forall x_h \to x_0 \Rightarrow \mathrm{F}(x_0) \leq \lim_h{}' \mathrm{F}_h(x_h)$

(jj) $\exists x_h \to x_0$ tale che $\mathrm{F}(x_0) = \lim_h \mathrm{F}_h(x_h)$.

Cominciamo con l'enunciare il seguente

LEMMA 2.1. *Se f_h verifica* (1.3), (1.4), *allora posto per* $u \in \mathrm{C}^1$ *e* $\forall \Omega \in \mathrm{A}p_n$ [(2)]:

$$\mathrm{F}_h(\Omega, u) = \int_\Omega f_h(x, \mathrm{D}u) \tag{2.2}$$

si ha $\forall u, v \in \mathrm{C}^1$

$$0 \leq \mathrm{F}_h(\Omega, u) \leq \int_\Omega g_h \, dx \,(\sup_{x\in\Omega} (1 + |\mathrm{D}u(x)|^p))$$

$$|\mathrm{F}_h^{1/p}(\Omega, u) - \mathrm{F}_h^{1/p}(\Omega, v)| \leq \sqrt[p]{\int_\Omega g_h \, dx} \,(\sup_{x\in\Omega} |\mathrm{D}u(x) - \mathrm{D}v(x)|) .$$

Per ogni $\Omega \in \mathrm{A}p_n$ si possono introdurre diverse distanze o distanze estese su $\mathrm{C}^1(\mathrm{R}^n) = \mathrm{C}^1$; con abuso di notazione indicheremo con $\mathrm{C}^0(\Omega)$ la distanza

$$(u, v) \in \mathrm{C}^1 \times \mathrm{C}^1 \to \sup_{x\in\Omega} |u(x) - v(x)|,$$

con $\mathrm{C}_0^0(\Omega)$ la distanza estesa

$$(u, v)\, \mathrm{C}^1 \times \mathrm{C}^1 \to \begin{cases} \sup_{x\in\Omega} |u(x) - v(x)| & \text{se } \operatorname{supp}(u - v) \subset\subset \Omega \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con $\mathrm{L}^p(\Omega)$ la listanza

$$(u, v) \in \mathrm{C}^1 \times \mathrm{C}^1 \to \left(\int_\Omega |u(x) - v(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

(2) Con $\mathrm{A}p_n$ indichiamo l'insieme degli aperti limitati di R^n.

e infine con $L_0^p(\Omega)$ la distanza estesa

$$(u, v) \in C^1 \times C^1 \to \begin{cases} \left(\int_\Omega | u(x) - v(x) |^p \, dx \right)^{1/p} & \text{se } \operatorname{supp}(u - v) \subset\subset \Omega \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se d_Ω e d'_Ω sono due distanze (estese) su C^1, un problema che è stato considerato è quello di vedere se si verifica l'uguaglianza:

$$\forall u \in C^1 \qquad \Gamma(N, d_\Omega^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(\Omega, v) = \Gamma(N, d_\Omega'^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(\Omega, v),$$

ove F_h sono i funzionali definiti da (2.2).

In particolare in [5] si dà un esempio in cui

$$\Gamma(N, L_0^1(\Omega)^-) \neq \Gamma(N, L^1(\Omega)^-).$$

Sussiste a tale scopo la seguente assai utile

PROPOSIZIONE 2.2 *Se F_h verificano* (1.3), (1.4), (1.5), (2.2), *si ha per ogni $u \in C^1$ e per ogni $\Omega \in A p_n$ per cui esistono tutti i limiti*:

$$\Gamma(N, C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(\Omega, v) = \Gamma(N, C_0^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(\Omega, v) =$$

$$= \Gamma(N, L^p(\Omega)^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(\Omega, v) = \Gamma(N, L_0^p(\Omega)^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(\Omega, v)$$

per ogni $p \geq 1$.

Allo scopo di pervenire alla dimostrazione del teorema 1.2 utile è la seguente

PROPOSIZIONE 2.3. *Se F_h verifica* (1.3), (1.4), (2.2), *allora esistono* (h_r) *e* $\varphi(x, z)$ *tale che* $\forall \Omega \in A p_n$, $u \in C^1$

$$\int_\Omega \varphi(x, Du) = \lim_r F_{h_r}(\Omega, u)$$

Dai risultati precedenti si ricava il

TEOREMA 2.4. *Se F_h verifica* (1.3), (1.4), (1.5), (2.2), *allora esistono* (h_r) *e* $f(x, z)$ *verificante* (1.3), (1.4), (1.5) *tali che* $\forall \Omega \in A p_n$ *e* $\forall u \in C^1$

$$\int_\Omega f(x, Du) = \Gamma(N, C_0^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{r \to \infty \\ v \to u}} F_{h_r}(\Omega, v) = \Gamma(N, L^1(\Omega)^-) \lim_{\substack{r \to \infty \\ v \to u}} F_{h_r}(\Omega, v).$$

Dal Teorema 2.4, tenendo conto dell'equivalenza tra la (2.1) e le condizioni (j), (jj) si ricava il Teorema 1.2.

3. Consideriamo la successione C_h di aperti di R^3 definiti da

$$C_h = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 < 1/h\}$$

e definiamo, (cfr. anche [5]),

$$a_h(x, y, z) = \begin{cases} h^2 & (x, y, z) \in C_h \\ 1 & (x, y, z) \notin C_h . \end{cases}$$

Poniamo per $\Omega \in Ap_3$ e $u \in C^1(R^3)$

$$F_h(\Omega, u) = \int_\Omega a_h(x, y, z) \, |Du|^2 \, dx \, dy \, dz .$$

Esempio. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 < 1 , \ |z| < 1\}$; allora esiste $k > 0$, tale che $\forall u \in C^1$

$$\int_\Omega |Du|^2 \, dx \, dy \, dz + k \int_\omega \left| \frac{\partial u}{\partial z}(0, 0, z) \right|^2 dz = \Gamma(N, C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(\Omega, v)$$

ove $\omega = \{(x, y, z) \in R^3 : x = y = 0 , |z| < 1\}$; mentre $\forall u \in C^1$

$$\int_\Omega |Du|^2 \, dx \, dy \, dz = \Gamma(N, L^1(\Omega)^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ u \to v}} F_h(\Omega, v) .$$

Infine, posto

$$F(\Omega, u) = \Gamma(N^+, C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{h \to \infty \\ v \to u}} F_h(\Omega, v)$$

si ha che

$$\Omega \in Ap_n \to F(\Omega, u)$$

non è la traccia su Ap_n di una misura, in quanto non è numerabilmente additiva.

Le dimostrazioni dei precedenti risultati appariranno in un lavoro di prossima pubblicazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BUTTAZZO (1976) – Tesi di Laurea, Pisa.

[2] M. CARRIERO e E. PASCALI – *Γ-convergenza di integrali*, di prossima pubblicazione.

[3] E. DE GIORGI (1975) – *Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area*, « Rend. Matem. Univ. Roma », *8*, 277–294.

[4] E. DE GIORGI e T. FRANZONI (1975) – *Su un tipo di convergenza variazionale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Roma, *58* (6), 842–850.

[5] P. MARCELLINI e C. SBORDONE (1975–76) – *An approach to the asymptotic behaviour of elliptic-parabolic operators*, Preprint Univ. di Firenze (to appear on « J. Math. Pures Appl. »).

[6] E. SANCHEZ-PALENCIA (1974) – *Problèmes de pérturbation liés aux phénomènes de conduction a travers des couches minces de grande résistivite*, « J. Math. Pures Appl. » (53), 251–270.

[7] C. SBORDONE (1975) – *Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale*, « Annali Sc. Norm. Sup. Pisa », IV, 617–638.