Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Louise Martin, Corina Reischer

Réseaux modulaires infinis

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.6, p. 734–739.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_6_734_0>

Algebra. — *Réseaux modulaires infinis* (*). Nota di LOUISE MARTIN e CORINA REISCHER, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si presenta anzitutto un modello per i reticoli modulari infiniti (sopra un alfabeto di cardinalità qualunque e contenente un insieme infinito di moduli). Si utilizzano poi tali reticoli nella simulazione degli automi deterministi, e si stabilisce il legame tra un automa e l'automa associato al reticolo modulare che lo simula.

I. INTRODUCTION

Les réseaux modulaires ont été introduits par McCulloch et Pitts [7] pour décrire en termes mathématiques l'activité du cerveau. Plus précisément, les réseaux modulaires sont un modèle de l'interaction des cellules nerveuses appelées neurones.

Malgré l'importance des réseaux modulaires tant en biologie [4] que dans la théorie des automates, ils ont seulement fait l'objet de descriptions [1, 2, 5, 9] ou de formalisation incomplète [8] dans la littérature scientifique.

Utilisant les partitions dont les blocs ont une certaine propriété nous avons donné une formalisation complète des réseaux modulaires sur un alphabet fini quelconque [6].

Nous présentons maintenant une extension des réseaux modulaires considérant un alphabet de cardinalité quelconque et un ensemble infini de modules. De plus, nous montrons que, pour tout automate $\mathscr{A}$, il existe un réseau modulaire dont l'automate associé simule $\mathscr{A}$.

II. PARTITIONS S-BORNÉES ET RÉSEAUX MODULAIRES

DÉFINITION. Un d-module est un triple $\mathscr{M} = (\mathrm{N}, \mathrm{I}, \mu)$ où N et I sont des ensembles non vides tels que $|\mathrm{I}| = d$ et $\mu : \mathrm{I}^{\mathrm{N}} \to \mathrm{I}$. Si $|\mathrm{N}|$ et d sont finis, le d-module est fini.

Un d-module est un appareil comprenant un ensemble de lignes d'entrée $\mathscr{E} = \{\varepsilon_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ et une seule ligne de sortie $\mathscr{S} = \{\omega\}$. Chaque ligne d'entrée est alimentée par une lettre d'un même alphabet I et la ligne de sortie émet un élément de I. L'appareil fonctionne sur une échelle de temps discret de telle sorte que si l'entrée du d-module à un temps t est $(i_n)_{n \in \mathrm{N}}$ alors la sortie est $\mu((i_n))$.

(*) Cette recherche a été subventionnée par l'Université du Québec à Trois-Rivières.
(**) Nella seduta del 23 giugno 1977.

Remarque. A tout d-module $\mathcal{M} = (\mathrm{N}, \mathrm{I}, \mu)$ peut être associé un automate.

Il suffit de considérer l'automate $\mathcal{A} = [\mathrm{I}^{\mathrm{N}}, \mathrm{I}, \mathrm{I}, f, g]$ où pour tout état $s \in \mathrm{I}$ et pour toute entrée $(i_n) \in \mathrm{I}^{\mathrm{N}}$:

$$f(s, (i_n)) = \mu((i_n)) \quad , \quad g(s, (i_n)) = \mu((i_n)) .$$

Cette remarque nous permet de parler de « l'état » d'un d-module et cet état coincide avec la sortie du d-module.

DÉFINITION. Soit $\{\mathcal{M}_j : j \in \mathrm{J}\}$ une famille non vide de d-modules où $\mathcal{M}_j = (\mathrm{N}_j, \mathrm{I}, \mu_j)$; $\mathcal{E}_j = \{\varepsilon_n^j : n \in \mathrm{N}_j\}$ est l'ensemble des lignes d'entrée et $\mathcal{S}_j = \{\omega^j\}$ est le singleton formé de la ligne de sortie de $\mathcal{M}_j$ ($j \in \mathrm{J}$).

Une partition π sur $\bigcup_{j \in \mathrm{J}} (\mathcal{E}_j \cup \mathcal{S}_j)$ est S-bornée si et seulement si

i) pour tout $\mathrm{B} \in \pi$, $|\mathrm{B} \cap \bigcup_{j \in \mathrm{J}} \mathcal{S}_j| \leq 1$;

ii) il existe $\mathrm{B} \in \pi$, tel que $|\mathrm{B} \cap \bigcup_{j \in \mathrm{J}} \mathcal{S}_j| = 0$.

DÉFINITION. Un réseau modulaire sur un alphabet I est un 5-uple $\mathcal{R} = [\{\mathcal{M}_j \mid j \in \mathrm{J}\}, \pi, \hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{S}}, \hat{\nu}]$ où

i) $\{\mathcal{M}_j \mid j \in \mathrm{J}\}$ est une famille non vide de d-modules $\mathcal{M}_j = (\mathrm{N}_j, \mathrm{I}, \mu_j)$ respectivement dans un état s_j ($j \in \mathrm{J}$);

ii) π est une partition S-bornée de $\bigcup_{j \in \mathrm{J}} (\mathcal{E}_j \cup \mathcal{S}_j)$;

iii) $\hat{\mathcal{E}} = \{\mathrm{B} : \mathrm{B} \in \pi, |\mathrm{B} \cap \bigcup_{j \in \mathrm{J}} \mathcal{S}_j| = 0\}$;

Posons $\hat{\mathcal{E}} = [\hat{\varepsilon}_p : p \in \mathrm{P}\}$ et appelons $\hat{\mathcal{E}}$ l'ensemble des lignes d'entrée de $\mathcal{R}$.

iv) $\hat{\mathcal{S}} \subseteq \{\mathrm{B} : \mathrm{B} \in \pi, |\mathrm{B} \cap \bigcup_{j \in \mathrm{J}} \mathcal{S}_j| = 1\}$;

Posons $\hat{\mathcal{S}} = \{\hat{\omega}_q : q \in \mathrm{Q}\}$ et appelons $\hat{\mathcal{S}}$ l'ensemble des lignes de sortie de $\mathcal{R}$.

v) $\nu : \mathrm{I}^{\mathrm{P}} \to \mathrm{I}^{\mathrm{Q}}$ est telle que

$$\hat{\nu}((i_p)_{p \in \mathrm{P}}) = (\mu_h((i_l^h)))_{h \in \mathrm{J}' \subseteq \mathrm{J}, l \in \mathrm{N}_h}$$

s'il existe $\hat{\omega} \in \hat{\mathcal{S}}$ tel que $\omega^h \in \hat{\omega}$ et où

$$i_l^h = \begin{cases} i_u & \text{si } \varepsilon_l^h \in \hat{\varepsilon}_u , \\ s_v & \text{s'il existe } \mathrm{B} \in \pi \text{ tel que } \{\omega^v, \varepsilon_l^h\} \subseteq \mathrm{B} . \end{cases}$$

Un réseau modulaire sur un alphabet I est fini si I et J sont des ensembles finis.

Dans le cas des réseaux finis avec $|\mathrm{I}| \geq 2$, on retrouve les réseaux améliorés envisagés en [2, 6, 8]. Dans le cas particulier où $|\mathrm{I}| = 2$, les réseaux constituent un modèle de l'interaction des neurones [3, 5, 9, 10].

Remarque. A chaque réseau modulaire $\mathscr{R} = [\{\mathscr{M}_j \mid j \in J\}, \pi, \hat{\mathscr{E}}, \hat{\mathscr{S}}, \hat{\nu}]$ sur un alphabet I on peut associer une fonction $\nu : I^P \to I^J$ telle que, si on suppose les d-modules $\mathscr{M}_j$ respectivement dans un état s_j et $(i_p) \in I^P$, alors

$$\nu((i_p)_{p \in P}) = (\mu_h((i_l^h)))_{h \in J, l \in N_h}$$

où

$$i_l^h = \begin{cases} i_u & \text{si } \varepsilon_l^h \in \hat{\varepsilon}_u, \\ s_v & \text{s'il existe } B \in \pi \text{ tel que } \{\omega^v, \varepsilon_l^h\} \subseteq B. \end{cases}$$

L'application ν se distingue de l'application $\hat{\nu}$ de la façon suivante: au signal d'entrée (i_p), ν nous donne l'élément de I^J dont les composantes sont les états de tous les d-modules de $\mathscr{R}$, tandis que $\hat{\nu}$ nous donne la sortie de $\mathscr{R}$. Comme les applications ν et $\hat{\nu}$ associées à un réseau modulaire $\mathscr{R}$ dépendent de l'état s_j de chacun des d-modules $\mathscr{M}_j$, nous écrirons lorsqu'il sera nécessaire

$$\nu((i_p) \mid (s_j)) \quad \text{et} \quad \hat{\nu}((i_p) \mid (s_j)).$$

Remarque. A tout réseau modulaire sur un alphabet I peut être associé un automate. Considérons le réseau modulaire $\mathscr{R} = [\{\mathscr{M}_j \mid j \in J\}, \pi, \hat{\mathscr{E}}, \hat{\mathscr{S}}, \hat{\nu}]$ et soit l'automate $\mathscr{A} = [I^P, I^J, I^Q, f, g]$ où pour état $(s_j) \in I^J$ et pour toute entrée $(i_p) \in I^P$,

$$f((s_j), (i_p)) = \hat{\nu}((i_p) \mid (s_j))$$

et

$$g((s_j), (i_p)) = \nu((i_p) \mid (s_j)).$$

III. Simulation

THÉORÈME. *Pour tout automate $\mathscr{A}$, il existe un réseau modulaire dont l'automate associé simule faiblement $\mathscr{A}$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{A} = [I, S, O, f, g]$ un automate. Posons $I = \{i_n : n \in N\}$, $S = \{s_p : p \in P\}$ et $O = \{o_m : m \in M\}$ où N, P et M sont des ensembles bien ordonnés. Soient n_0, p_0 et m_0 le plus petit élément de N, de P et de M respectivement. Soit

$$Q = \{(s_j, o_k) : \exists i_n \in I, \exists s_p \in S : f(s_p, i_n) = s_j \quad \text{et} \quad g(s_p, i_n) = o_k\},$$
$$\cup \{s_j, o_{m_0}) : \forall i_n \in I, \forall s_p \in S : f(s_p, i_n) \neq s_j\}.$$

Posons $|Q| = q$ et soit $J = \{(j, k) : (s_j, o_k) \in Q\}$.

À chaque couple $(j, k) \in J$, associons le 2-module $\mathscr{M}_{jk} = (J \cup N, \{0, 1\}, \mu_{jk})$ où $\mathscr{E}_{jk} = \{\varepsilon_{xy}^{jk} : (x, y) \in J\} \cup \{\varepsilon_r^{jk} : r \in N\}$ et $\mathscr{S}_{jk} = \{\omega^{jk}\}$. L'application $\mu_{jk} : \{0, 1\}^{J \cup N} \to \{0, 1\}$ est ainsi définie: pour tout $(e, c) \in \{0, 1\}^{J \cup N}$ où

$e = (e_{xy}) \in \{0, 1\}^J$ et $c = (c_r) \in \{0, 1\}^N$, soient

$$l = \begin{cases} \inf \{r : c_r = 1\}, \\ n_0 \quad \text{autrement}; \end{cases}$$

$$h = \begin{cases} \inf \{x \mid \exists t : e_{xt} = 1 , t = \inf \{y \mid \exists r : e_{ry} = 1\}\}, \\ p_0 \quad \text{autrement}. \end{cases}$$

Alors

$$\mu_{jk}(e, c) = \begin{cases} 1 & \text{si } s_j = f(s_h, i_l) \quad \text{et} \quad o_k = g(s_h, i_l), \\ 0 & \text{autrement}. \end{cases}$$

Remarquons que pour chaque $(e, c) \in \{0, 1\}^{J \cup N}$, il existe un et un seul module $\mathscr{M}_{jk}$ tel que $\mu_{jk}(e, c) = 1$.

Considérons le réseau modulaire $\mathscr{R}$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$, $\mathscr{R} = [\{\mathscr{M}_{jk} : (j, k) \in J\}, \pi, \hat{\mathscr{E}}, \hat{\mathscr{S}}, \hat{\nu}]$ où π est la partition S-bornée de $\bigcup_{(j,k) \in J} (\mathscr{E}_{jk} \cup \mathscr{S}_{jk})$ ainsi donnée:

i) Pour $n \in N$, soit

$$B_n = \{\varepsilon_n^{jk} : (j, k) \in J\},$$

ii) Pour chaque couple $(x, y) \in J$, soit

$$B_{xy} = \{\varepsilon_{xy}^{jk} : (j, k) \in J\} \cup \{\omega^{xy}\}.$$

Posons $\hat{\mathscr{E}} = \{B_n : n \in N\}$ et $\hat{\mathscr{S}} = \{B_{xy} : (x, y) \in J\}$.
Enfin, soit $\hat{\nu} : \{0, 1\}^N \to \{0, 1\}^J$ ainsi définie:

$$\hat{\nu}((i_n)_{n \in N}) = (\mu_{jk}(\cdots, s_{xy}, \cdots, i_n, \cdots))_{(j,k) \in J},$$

où s_{xy} est l'état du 2-module $\mathscr{M}_{xy}$, $(x, y) \in J$.

Pour vérifier que l'automate associé à $\mathscr{R}$, à savoir $\mathscr{A}_{\mathscr{R}} = [\{0, 1\}^N, \{0, 1\}^J, \{0, 1\}^J, f_1, g_1]$ simule faiblement l'automate $\mathscr{A}$, posons

$$h_1 : I \to \{0, 1\}^N$$

telle que $h_1(i_n) = (\delta_t)_{t \in N}$ où

$$\delta_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t = n, \\ 0 & \text{si } t \neq n; \end{cases}$$

$$h_2 : S \to \{0, 1\}^J$$

telle que $h_2(s_p) = (e_{xy})_{(x,y)\in J}$ où

$$e_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = p \quad \text{et} \quad y = 1\,, \\ 0 & \text{autrement}\,; \end{cases}$$

et $h_3 : \{0\,,1\}^J \to O$ telle que $h_3(e) = o_k$ où

$$k = \begin{cases} \inf\,\{y \mid \exists r : e_{ry} = 1\,, r = \inf\,\{x \mid \exists t : e_{xt} = 1\}\}\,, \\ m_0 \quad \text{autrement}\,. \end{cases}$$

On peut alors vérifier que pour tout $s_p \in S$ et pour tout $i_n \in I$, $h_3(g_1(h_2(s_p), h_1(i_n))) = g(s_p\,,i_n)$.

Remarque. Dans le cas où les ensembles P et M sont infinis dénombrables, on peut utiliser la même preuve qu'en [6], en changeant convenablement les notations.

THÉORÈME. *Soit* $\mathscr{A} = [I\,,S\,,O\,,f\,,g]$ *un automate et soit* $\mathscr{R}$ *le réseau modulaire qui le simule. Alors il existe un homomorphisme d'automate entre* $\mathscr{A}_{\mathscr{R}}$ *et* $\mathscr{A}'$ *où* $\mathscr{A}'$ *est un sous-automate de l'automate* $\mathscr{A}_{\mathscr{R}}$ *associé à* $\mathscr{R}$.

Démonstration. Posons $I = \{i_n : n \in N\}$, $S = \{s_p : p \in P\}$ *et* $O = \{o_m : m \in M\}$. Alors $\mathscr{A}_{\mathscr{R}} = [\{0\,,1\}^N, \{0\,,1\}^J, \{0\,,1\}^J, f_1\,, g_1]$ où

$$f_1((e_{xy})_{(x,y)\in J}\,, (\delta_t)_{t\in N}) = g_1((e_{xy})_{(x,y)\in J'}\,, (\delta_t)_{t\in N}) = \hat{\nu}((\delta_t)_{t\in N} \mid (e_{xy})_{(x,y)\in J})\,.$$

Soit $\mathscr{A}' = [I', S', O'\,, f'\,, g']$ le sous-automate de $\mathscr{A}_{\mathscr{R}}$ où:

$$I' = \{(\delta_t)_{t\in N} : \exists n \in N : \delta_n = 1 \quad \text{et} \quad \delta_t = 0 \quad \text{si} \quad t \neq n\}\,,$$

$$S' = O' = \{(e_{xy})_{(x,y)\in J} : \exists h\,, k : e_{hk} = 1 \quad \text{et} \quad e_{xy} = 0 \quad \text{si} \quad x \neq h \quad \text{et} \quad y \neq k\}\,.$$

Ici f' et g' sont les restrictions respectives de f_1 et de g_1 à $S' \times I'$.

Montrons qu'il existe un triple $(\chi\,,\phi\,,\psi)$ où $\chi\,,\phi$ et ψ sont des applications telles que $\chi : I' \to I$, $\phi : S' \to S$ et $\psi : O' \to O$ et telles que les diagrammes suivants sont commutatifs.

$$\begin{tikzcd} S' \times I' \arrow[r, "(\phi\,,\chi)"] \arrow[d, "f'"'] & S \times I \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "\phi"'] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S' \times I' \arrow[r, "(\phi\,,\chi)"] \arrow[d, "g'"'] & S \times I \arrow[d, "g"] \\ O' \arrow[r, "\psi"'] & O \end{tikzcd}$$

Soit $\chi : I' \to I$ ainsi donnée:

$$\chi((\delta_t)) = i_l \qquad \text{si} \quad \delta_l = 1\,.$$

Soit $\phi : S' \to S$ donnée par:

$$\phi((e_{xy})) = s_h \qquad \text{si} \quad e_{hk} = 1 .$$

Soit $\psi : O' \to O$ définie ainsi:

$$\psi((e_{xy})) = o_k \qquad \text{si} \quad e_{hk} = 1 .$$

Soit $e = (e_{xy}) \in S'$ tel que $e_{hk} = 1$ et soit $c = (\delta_t) \in I'$ tel que $\delta_l = 1$ et supposons que:

$$\mu_{xy}(e, c) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = j \quad \text{et} \quad y = r , \\ 0 & \text{autrement} . \end{cases}$$

Alors $f(s_h, i_l) = s_j$ et $g(s_h, i_l) = o_r$. Par conséquent,

$$\phi(f'(e, c)) = \phi(\hat{\nu}(c \mid e)) = \phi((e'_{xy}))$$

où:

$$e'_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = j \quad \text{et} \quad y = r , \\ 0 & \text{autrement} . \end{cases}$$

Donc

$$\phi(f'(e, c)) = s_j = f(s_h, i_l) = f(\phi(e), \chi(c))$$

et

$$\psi(g'(e, c)) = \psi(\hat{\nu}(c \mid e)) = \psi((e'_{xy})) = o_r = g(s_h, i_l) = g(\phi(e), \chi(c)) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. A. ARBIB (1965) – *Brains, Machines and Mathematics* (McGraw Hill, New York).

[2] M. A. ARBIB (1969) – *Theories of abstract automata* (Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J).

[3] E. R. CAIANIELLO (1961) – *Outline of a theory of thought-processes and thinking machines*, « J. Theor. Biol. », *1*, 204–235.

[4] J. A. GRIFFITH (1971) – *Mathematical Neurobiology* (Academic Press, London and New York).

[5] S. C. KLEENE (1956) – *Representation of events in nerve nets and finite automata*, In: Automata Studies, Princeton, 3–41.

[6] L. MARTIN and C. REISCHER – *On the modular nets*, Discrete mathematics (à paraître).

[7] W. S. MCCULLOCH and W. PITTS (1943) – *A logical calculus of the ideas immanent in nervos activity*, « Bull. Math. Biophys. », *5*, 115–133.

[8] C. REISCHER and D. SIMOVICI (1974) – *On a formalization of abstract modulor networks*, « Bull. Inst. Politehn. Iași » (N. S.), *20* (24), fasc. 1–2, Sect. I, 9–14.

[9] P. H. STARKE (1963) – *Theorie der Nervennetze*, Mathematische und physikalischtechnische Probleme der Kybernetik (Tagungsbericht), Berlin.

[10] P. H. STARKE (1965) – *Einführung in die theorie der Nervennetze*, « Dtsch. Z. Philosophie », *13*, 64–86.

[11] P. H. STARKE (1965) – *Die Imitation endlicher Medwedjew-Automaten durch Nervennetze*, « Z. Math. Logik Grundlagen Math. », *11*, 241–248.

[12] K. A. ZECH (1971) – *Bemerkungen zur theorie stochastischer und nichtdeterministischer Nervennetze*, « EIK », 7, 407–427.