Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Guido Zappa

Sulla costruzione di classi di Fitting

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.6, p. 725–727.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_6_725_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 23 giugno 1977

Presiede il Presidente della Classe Beniamino Segre

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Sulla costruzione di classi di Fitting.* Nota (*) del Socio Guido Zappa.

Summary. — We give a way of construction of the Fitting classes of finite groups, which generalizes the method employed by D. Blessenohl, W. Gaschütz and H. Lausch for normal Fitting classes.

1. Ricordiamo che si dice *classe di Fitting* una classe $\mathscr{F}$ di gruppi finiti verificante le seguenti proprietà: 1) Se $G \in \mathscr{F}$ e N è un sottogruppo normale di G, si ha che $N \in \mathscr{F}$; 2) Se G è un gruppo finito e $G = N_1 N_2$ con $N_1, N_2 \in \mathscr{F}$ e N_1, N_2 normali in G, allora $G \in \mathscr{F}$. Se $\mathscr{F}$ è una classe di Fitting e G è un gruppo finito, esiste un sottogruppo normale $G_{\mathscr{F}}$ di G tale che $G_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}$ e ogni sottogruppo normale N di G che appartenga ad $\mathscr{F}$ è incluso in $G_{\mathscr{F}}$. Il sottogruppo $G_{\mathscr{F}}$ è chiamato *$\mathscr{F}$-radicale* di G. Una classe di Fitting $\mathscr{F}$ si dice *normale* se, per ogni gruppo finito risolubile G, $G_{\mathscr{F}}$ risulta $\mathscr{F}$-massimale, cioè non è contenuto in un sottogruppo più ampio appartenente ad $\mathscr{F}$.

Nel 1970, D. Blessenohl e W. Gaschütz [1] provarono il seguente teorema (Satz 3.1): «Sia A un gruppo abeliano e B un sottogruppo di A. Per ogni gruppo finito G sia dato un omomorfismo f_G di G in A tale che, per ogni sottogruppo normale N di G, f_N coincide con la restrizione di f_G ad N. Allora la classe $\mathscr{H}$ dei gruppi finiti H per i quali $f_H(H) \subset B$ è una classe di Fitting normale. Si ha, per ogni gruppo finito, $G_{\mathscr{H}} = f_G^{-1}(B)$».

Nel 1973 H. Lausch [2] mostrò che *ogni* classe di Fitting normale può costruirsi nel modo anzidetto. Nella presente Nota, si fornisce un procedimento che, generalizzando quello di Blessenohl–Gaschütz e di Lausch, fornisce la possibilità di costruire ogni classe di Fitting (anche non normale).

(*) Presentata nella seduta del 23 giugno 1977.

2. TEOREMA I. *Sia* F *un gruppo assegnato. Sia* D *una legge che associa ad ogni gruppo finito* G *un insieme di omomorfismi* D(G) *di* G *in* F, *verificante le seguenti proprietà*:

1) *Se* G_1, G_2 *sono due gruppi finiti e* φ *è un isomorfismo di* G_1 *su* G_2, *è* $D(G_1) = \varphi \cdot D(G_2)$;

2) *Se* $f_1, f_2 \in D(G)$, Gf_1 *e* Gf_2 *sono isomorfi*;

3) *Se* N *è un sottogruppo normale del gruppo finito* G, *per ogni* $f \in D(G)$ *esiste un* $\bar{f} \in D(N)$ *tale che, per ogni* $n \in N$ *sia* $nf = n\bar{f}$.

Sia $\mathcal{F}$ *la classe dei gruppi finiti così definita*: $G \in \mathcal{F}$ *se e solo se per un* $f \in D(G)$ *è* $Gf = \langle 1 \rangle$.

Allora $\mathcal{F}$ *è una classe di Fitting.*

Sia $G \in \mathcal{F}$, e sia N un sottogruppo normale di G. Allora per un $f \in D(G)$ è $Gf = \langle 1 \rangle$. Esiste allora, in base a 3), un $\bar{f} \in D(N)$ tale che, per ogni $n \in N$, sia $nf = n\bar{f}$. Essendo $nf = 1$, perchè $n \in G$, sia ha $n\bar{f} = 1$, onde $N\bar{f} = \langle 1 \rangle$. Ne segue $N \in \mathcal{F}$.

Siano poi N_1, N_2 due sottogruppi normali di un dato gruppo finito G, e sia $G = N_1 N_2$, $N_1 \in \mathcal{F}$, $N_2 \in \mathcal{F}$. Sia $g \in G$ e $f \in D(G)$. Allora $g = n_1 n_2$ con $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$, onde $gf = n_1 f \cdot n_2 f$. In base a 3), esistono due omomorfismi $\bar{f}_2 \in D(N_2)$ tali che $n_1 f = n_1 \bar{f}_1$, $n_2 f = n_2 \bar{f}_2$. Essendo $N_i \in \mathcal{F}$ e $\bar{f}_i \in D(N_i)$ $\bar{f}_1 \in D(N_1)$, $(i = 1, 2)$ si ha $n_1 \bar{f}_1 = n_2 \bar{f}_2 = 1$, onde $gf = n_1 f \cdot n_2 f = n_1 \bar{f}_1 \cdot n_2 \bar{f}_2 = 1 \cdot 1 = 1$, cioè $Gf = \langle 1 \rangle$, e $G \in \mathcal{F}$.

Pertanto $\mathcal{F}$ è una classe di Fitting.

3. TEOREMA II. *Sia* $\mathcal{F}$ *una classe di Fitting. Allora esistono un gruppo* F *ed una legge* D *che associa ad ogni gruppo finito* G *un insieme di omomorfismi* D (G) *di* G *in* F *verificante le* 1), 2), 3) *del Teorema* I, *tali che* $G \in \mathcal{F}$ *se e solo se per un* $f \in D(G)$ *è* $Gf = \langle 1 \rangle$.

Sia $\mathcal{H}$ un insieme di gruppi finiti tale che, per ogni gruppo finito G, esista uno e un solo gruppo appartenente ad $\mathcal{H}$ e isomorfo a G. Consideriamo il prodotto diretto ridotto $P = \times_i G_i$ $(G_i \in \mathcal{H})$ dei gruppi appartenenti ad $\mathcal{H}$. Sia $M = \times_i (G_i)_{\mathcal{F}}$, e sia $F = P/M = \times_i (G_i/(G)_i)_{\mathcal{F}}$. Per ogni gruppo finito L, sia E (L) l'insieme degli isomorfismi di L in P così definito: $\lambda \in E(L)$ se e solo se $L\lambda$ è un sottogruppo subnormale di un $G_i \in \mathcal{H}$. Sia D(L) l'insieme degli omomorfismi di L in F così definito: $f \in D(L)$ se $f = \lambda \vartheta_i$ con $\lambda \in E(L)$ isomorfismo di L su un sottogruppo subnormale di un $G_i \in \mathcal{H}$, e ϑ_i omomorfismo naturale di G_i su $G_i/(G_i)_{\mathcal{F}}$.

Mostriamo che sono verificate le 1), 2), 3) del Teorema I. La 1) è ovviamente verificata. Per provare la 2), si osservi che se $f \in D(L)$ e $f = \lambda \vartheta_i$ si ha $Lf = L\lambda\vartheta_i = ((L\lambda)(G_i)_{\mathcal{F}})/(G_i)_{\mathcal{F}}$; ma $((L\lambda)(G_i)_{\mathcal{F}})/(G_i)_{\mathcal{F}}$ è isomorfo a $L\lambda/L\lambda \cap (G_i)_{\mathcal{F}}$. Essendo $L\lambda$ subnormale in G_i, si ha $L\lambda \cap (G_i)_{\mathcal{F}} = (L\lambda)_{\mathcal{F}}$. Ne segue che Lf è isomorfo a $L\lambda(L\lambda)_{\mathcal{F}}$, che a sua volta è isomorfo a $L/L_{\mathcal{F}}$, perchè λ è un isomorfimo. Pertanto se $f_1, f_2 \in D(L)$ si ha che Lf_1 ed Lf_2 sono ambedue isomorfi a $L/L_{\mathscr{F}}$, quindi sono isomorfi tra loro, e la 2) è provata.

Proviamo ora la 3). Sia N un sottogruppo normale di L, e sia $f = \lambda\vartheta_i \in D(L)$. Allora $L\lambda$ è un sottogruppo subnormale di G_i, onde, essendo N normale in L, $N\lambda$ è normale in $L\lambda$, quindi subnormale in G_i. Ne segue che la restrizione $\bar{\lambda}$ di λ ad N, risulta un isomorfismo di N su un sottogruppo subnormale di G_i, onde $\bar{\lambda} \in E(N)$. Di conseguenza $\bar{f} = \bar{\lambda}\vartheta_i \in D(N)$. Per ogni $n \in N$ si ha $n\bar{f} = (n\bar{\lambda})\vartheta_i = (n\lambda)\vartheta_i = nf$. Quindi, per ogni $f \in D(L)$, esiste un $\bar{f} \in D(N)$ tale che $nf = n\bar{f}$ per ogni $n \in N$, e la 3) è provata.

Sia $\mathscr{F}'$ la classe dei gruppi finiti tale che $G \in \mathscr{F}'$ se e solo se per un $f \in D(G)$ è $Gf = \langle 1 \rangle$. Allora, in base al Teorema I, $\mathscr{F}'$ è una classe di Fitting.

Mostriamo ora che $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$. Sia $L \in \mathscr{F}'$. Esiste un $G_i \in \mathscr{H}$ tale che L sia isomorfo a G_i. Sia λ un isomorfismo di L su G_i, e ϑ_i l'omomorfismo naturale di G_i su $G_i/(G_i)_{\mathscr{F}}$. Allora, posto $f = \lambda\vartheta_i$, si ha che $f \in D(L)$, onde, essendo $L \in \mathscr{F}'$, si ha $Lf = \langle 1 \rangle$. Ma $Lf = L\lambda\vartheta_i = G_i\vartheta_i = G_i/(G_j)_{\mathscr{F}}$, e quindi $G_i = (G_i)_{\mathscr{F}}$, e di conseguenza $L = L_{\mathscr{F}}$, cioè $L \in \mathscr{F}$. Ne segue $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$. Viceversa sia $L \in \mathscr{F}$. Allora $L = L_{\mathscr{F}}$, cioè $L/L_{\mathscr{F}} = \langle 1 \rangle$. Pertanto $(G_i/G)_{\mathscr{F}}) = \langle 1 \rangle$, e poichè $f = \lambda\vartheta_i$ applica L su $G_i/(G_i)_{\mathscr{F}}$, si ha $Lf = \langle 1 \rangle$, con $f \in D(L)$. Ne segue $L \in \mathscr{F}'$, e quindi $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$. Concludendo $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$ e il teorema è provato.

CITAZIONI

[1] D. BLESSENOHL e W. GASCHÜTZ (1970) – *Über normale Schunk-und Fittingklassen*, «Math. Zeitschr», *118*, 1-8.

[2] H. LAUSCH (1973) – *On Normal Fitting Classes*, «Math. Zeitschr.», *130*, 67-72.