Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Beniamino Segre, Gabriele Korchmaros

Una proprietà degli insiemi di punti di un piano di Galois caratterizzante quelli formati dai punti delle singole rette esterne ad una conica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.5, p. 613–619.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_5_613_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Geometrie finite. — *Una proprietà degli insiemi di punti di un piano di Galois caratterizzante quelli formati dai punti delle singole rette esterne ad una conica.* Nota di BENIAMINO SEGRE e GABRIELE KORCHMÁROS, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — The authors give the following characterization of the external lines to an irreducible conic of $S_{2,q}$: If every chord or tangent of an irreducible conic Ω meets a set $\mathscr{L}$ of points in a unique point, then $\mathscr{L}$ is necessarily given by all the points of a line external to Ω.

While this result admits no analogue in the real field, a number of similar properties can be established or investigated in any Galois geometry.

INTRODUZIONE

Alcuni interrogativi (cfr. [1], [3], [8]) emersi nello studio delle ovali e dei k-archi, studio fondato nel 1955 da B. Segre e poi ampiamente svolto e generalizzato in varie direzioni dallo stesso B. Segre e dai suoi discepoli e quindi ulteriomente arricchito da altri Autori (secondo quanto, fra l'altro, risulta dalla monografia [26] e dalla Memoria [27], le quali anche contengono un'ampia bibliografia sull'argomento a cui rinviamo, aggiungendo in più altri lavori elencati alla fine della presente Nota), si riconducono al problema di vedere quand'è che in un piano proiettivo $S_{2,q}$ di Galois un insieme di punti ha uno e un sol punto in comune con ogni corda o tangente di una medesima conica irriducibile di $S_{2,q}$.

Sorvolando per brevità sugli interrogativi suaccennati e sulle risposte che ad essi potranno derivarsi dal presente lavoro, affrontiamo qui il problema testè formulato, col dimostrare (nel n. 2) come tutti e soli gli insiemi dotati di una siffatta struttura grafica rispetto ad una conica irriducibile di $S_{2,q}$ non sono altro che le rette esterne alla medesima conica considerate quali insiemi di tutti i loro punti.

1. Dato un piano proiettivo $S_{2,q}$ di Galois, si considerino in esso una conica Ω irriducibile e un qualsivoglia insieme $\mathscr{L}$ di punti tale che verifichi la seguente condizione:

U) *ogni corda o tangente di* Ω *incontra* $\mathscr{L}$ *in uno ed un solo punto.*

È subito visto che sussiste allora la relazione

i) $\mathscr{L} \cap \Omega = \varnothing$.

Premettiamo ancora il fatto non banale che

ii) $\mathscr{L}$, *in conseguenza della* U), *consta necessariamente di* $q+1$ *punti.*

(*) Nella seduta del 14 maggio 1977.

Dimostrazione. Posto per abbreviare $|\mathscr{L}| = k$, si tratta di provare che le U) e i) implicano la

$$k = q + 1 . \tag{1}$$

Mostriamo anzitutto che è

$$k \geq q + 1 . \tag{2}$$

A tal uopo, fissiamo un punto $O \in \Omega$; in base alla i), è certamente $O \notin \mathscr{L}$. D'altro canto, ciascuna delle $q + 1$ rette r di $S_{2,q}$ uscenti da O risulta una corda od una tangente di Ω; inoltre, in virtù della condizione U), ogni r incontra $\mathscr{L}$ in uno ed un sol punto, P, certamente distinto da O. Poiché dunque $r = OP$, a rette r distinte corrispondono punti P distinti. Il numero dei suddetti punti P (di $\mathscr{L}$) vale quindi esattamente $q + 1$, onde segue la (2).

Stabiliremo la proposizione ii) – dianzi annunciata – per assurdo, supponendo che *non* valga (1); in virtù della (2), sarà dunque

$$k \geq q + 2 . \tag{3}$$

L'insieme Γ delle rette s di $S_{2,q}$ che sono corde o tangenti di Ω consta manifestamente di

$$t = |\Gamma| = \binom{q+1}{2} + (q + 1) = \frac{(q+1)(q+2)}{2} \tag{4}$$

rette. Esso si decompone in k sottoinsiemi Γ_P, con $P \in \mathscr{L}$, denotando con Γ_P l'insieme delle rette di Γ che contengono P; e tali sottoinsiemi sono a due a due disgiunti, in virtù della condizione U). Se dunque poniamo $t_P = |\Gamma_P|$, risulta

$$t = \Sigma t_P . \tag{5}$$

Distinguiamo ora due alternative, secondoché q è pari o dispari.

Se q è pari, P può coincidere o meno col *nucleo* di Ω; ed è subito visto che rispettivamente si ha

$$t_P = q + 1 \quad , \quad t_P = 1 + q/2 ,$$

onde in ogni caso risulta sicuramente

$$t_P > \frac{q+1}{2} .$$

Se q è dispari, il punto P [certamente non situato su Ω in forza della i)] può essere *esterno* od *interno* rispetto ad Ω; e si noti che esistono di sicuro punti P del primo tipo, ciascuno ottenibile a norma della U) come intersezione di $\mathscr{L}$ con una tangente di Ω. È subito visto che in quei due casi si ha rispettivamente

$$t_{\mathrm{P}} = 2 + \frac{q-1}{2} > \frac{q+1}{2} \quad , \quad t_{\mathrm{P}} = \frac{q+1}{2} .$$

Sia nell'una che nell'altra delle due alternative sopra indicate, le (5), (3) forniscono dunque subito

$$t > k\,\frac{q+1}{2} \geq \frac{(q+1)(q+2)}{2} .$$

Ma ciò è in contrasto con la (4); e questa contraddizione dimostra l'asserto.

Con una lieve modificazione del procedimento introdotto da B. Segre [11] nel dimostrare il suo ormai classico teorema sulle ovali di un piano di Galois d'ordine dispari, proviamo ora che:

iii) *I lati di un qualunque triangolo con vertici giacenti su Ω incontrano $\mathscr{L}$ in tre punti allineati.*

Dimostrazione. Denotato con $A_1 A_2 A_3$ un qualsivoglia triangolo inscritto in Ω, si assuma $A_1 A_2 A_3$ quale triangolo fondamentale di un sistema di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) in $S_{2,q}$:

$$A_1 : (1, 0, 0) , \qquad A_2 : (0, 1, 0) , \qquad A_3 : (0, 0, 1) .$$

Introdotti per comodità espositiva i punti

$$B_1 = A_2 A_3 \cap \mathscr{L} , \qquad B_2 = A_3 A_1 \cap \mathscr{L} , \qquad B_3 = A_1 A_2 \cap \mathscr{L}$$

[definiti univocamente e distinti dai punti A in forza delle U), i)], le loro coordinate omogenee risultano necessariamente della forma

$$B_1 : (0, 1, b_1) , \qquad B_2 : (b_2, 0, 1) , \qquad B_3 : (1, b_3, 0) ,$$

con $b_1, b_2, b_3 \in \mathrm{GF}(q)$ e $b_1 b_2 b_3 \neq 0$.

Denoteremo con P uno qualunque dei $q-2$ punti di Ω distinti dagli A e con r una qualunque delle $q-1$ rette di $S_{2,q}$ passanti per uno fissato ed un solo dei punti A. Tali rette – complessivamente in numero di $3(q-1)$ – saranno quelle rappresentate dalle singole equazioni

$$x_3 = \mu x_2 , \qquad x_1 = \mu x_3 , \qquad x_2 = \mu x_1 ,$$

ove μ è un parametro – coordinata della r nel fascio di centro il punto A ch'essa contiene – assumente una ed una sola volta tutti i valori non nulli del campo GF(q) base di $S_{2,q}$; in virtù di una nota estensione del teor. di Wilson, il prodotto di tali valori μ uguaglia sempre $(-1)^q$ (cfr. [11], [26] § 5).

Rileviamo ora che le tre rette

$$A_1B_1 : x_3 = b_1 x_2 , \qquad A_2B_2 : x_1 = b_2 x_3 , \qquad A_3B_3 : x_2 = b_3 x_1$$

possono precisamente ottenersi dalle $3(q-1)$ rette suddette coll'omettere le $3(q-2)$ rette del tipo A_1P, A_2P, A_3P. In virtù del teorema di Ceva, il prodotto delle coordinate relative alle tre rette congiungenti A_1, A_2, A_3 con uno stesso punto P non situato su nessun lato del triangolo $A_1A_2A_3$ vale precisamente 1; ne consegue che $b_1 b_2 b_3 = (-1)^{3q}$, e quindi

$$b_1 b_2 b_3 = \begin{cases} 1 , & \text{se } q \text{ è pari,} \\ -1 , & \text{se } q \text{ è dispari .} \end{cases}$$

Questa conclusione prova appunto l'allineamento dei tre punti B.

2. Siamo ormai in grado di raggiungere l'intento dichiarato nell'Introduzione, ossia di dimostrare il seguente

TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinché, in un piano proiettivo* $S_{2,q}$ *di Galois, un insieme* $\mathcal{L}$ *di punti abbia uno ed un sol punto in comune con ogni corda o tangente di una fissata conica* Ω *irriducibile di* $S_{2,q}$, *è che* $\mathcal{L}$ *risulti costituito da tutti e soli i punti di una retta di* $S_{2,q}$ *esterna ad* Ω.

Dimostrazione. La condizione è manifestamente sufficiente.

Per vederne la necessità, converrà distinguere il caso pari ($q = 2^t$) da quello dispari ($q = p^t$, $p > 2$ primo). Osserviamo che in ciascun caso, avuto riguardo alla iii), ogni triangolo inscritto in Ω individua tre punti distinti fra loro allineati appartenenti ad $\mathcal{L}$, ciascuno intersezione di $\mathcal{L}$ con uno dei lati del triangolo; poiché Ω contiene in tutto esattamente $q+1$ punti, così è chiaro che il numero n delle terne di punti di $\mathcal{L}$ ottenibili nel modo anzidetto soddisfa alla

$$n \leq \binom{q+1}{3} . \tag{6}$$

Supposto anzitutto q pari, e cioè ammesso che il campo base di $S_{2,q}$ abbia la caratteristica

$$p = 2 , \tag{7}$$

per dimostrare il teorema basterà stabilire che nella (6) vale necessariamente il segno di uguaglianza. Ed invero, supposto

$$n = \binom{q+1}{3} , \tag{8}$$

poiché – in base alla ii) – il numero delle terne di punti distinti di $\mathcal{L}$ risulta allora uguale ad n, così ognuna di queste terne è una di quelle che provengono (nel modo indicato nel precedente capoverso) da un triangolo inscritto in Ω, e consta pertanto di tre punti allineati; e si conclude che i $q+1$ punti di $\mathcal{L}$, essendo a tre a tre allineati, sono i $q+1$ punti di una retta, la quale poi – in forza della i) – non può che risultare esterna ad Ω.

Potremo dunque – nel caso attuale che valga la (7) – dimostrare il teorema ragionando per assurdo, coll'ammettere che *non* valga la (8), ossia supponendo che nella (6) debba prendersi lo stretto segno di disuguaglianza. E questo implica che esista (almeno) una terna B_1, B_2, B_3 di punti allineati di $\mathscr{L}$, ottenibile nel modo indicato a partire da *due diversi* triangoli $A_1A_2A_3$ ed $A_1^*A_2^*A_3^*$ inscritti in Ω, per cui varranno ovviamente le

$$
\begin{aligned}
B_1 &= A_2A_3 \cap \mathscr{L} = A_2^*A_3^* \cap \mathscr{L} \\
B_2 &= A_3A_1 \cap \mathscr{L} = A_3^*A_1^* \cap \mathscr{L} \qquad (9)\\
B_3 &= A_1A_2 \cap \mathscr{L} = A_1^*A_2^* \cap \mathscr{L}\,.
\end{aligned}
$$

In virtù del teorema di Desargues (cfr. per esempio [20], n. 101), le tre rette $A_1A_1^*$, $A_2A_2^*$, $A_3A_3^*$ concorrono in un punto, Q, il quale manifestamente non può stare su Ω nè essere il nucleo di Ω.

Consideriamo ora l'omologia di centro Q che trasforma in sè la conica Ω, la quale risulta involutoria e non identica. In forza della (7), quest'omologia è speciale, avendo per asse la (unica) *tangente* di Ω che esce dal punto Q. Questo asse contiene i tre punti (9), il che contraddice però l'ipotesi che ogni tangente (o corda) di Ω incontri $\mathscr{L}$ in un sol punto. La contraddizione a cui siamo così giunti prova il teorema nel caso pari.

Esaminiamo infine il caso in cui q sia d i s p a r i. Attualmente la parte conclusiva della dimostrazione svolta per il caso pari viene a cadere, onde converrà ricorrere ad ulteriori argomentazioni in cui interverrà la nota estensione del teorema di Pasch ai piani di Galois, secondo la quale (cfr. [15], n. 14):

Dato un piano proiettivo $S_{2,q}$ *di Galois d'ordine* q *dispari, supponiamo che* A, B, C *siano tre punti distinti di una conica* $\mathscr{C}$ *irriducibile di* $S_{2,q}$. *Se* r *denota una qualunque retta del piano non passante per nessuno di essi, allora i tre punti segati su* r *dai lati del triangolo* ABC *risultano tutti esterni oppure due interni ed uno esterno rispetto a* $\mathscr{C}$.

Incominciamo lo studio del caso dispari, coll'osservare che – come immediata conseguenza della condizione U), delle i), ii) e del fatto che Ω contiene $q+1$ punti – necessariamente

iv) $\mathscr{L}$ *consta di* $(q+1)/2$ *punti esterni ed altrettanti punti interni ad* Ω [e si noti che, q essendo dispari e quindi ≥ 3, risulta $(q+1)/2 \geq 2$].

Rileviamo poi che, dalle iii), iv) e dalla richiamata estensione del teorema di Pasch, segue subito che:

v) *Scelti ad arbitrio due distinti punti* B_1, $B_2 \in \mathscr{L}$ *interni ad* Ω, *ogni punto* $A_3 \in \Omega$ *viene ad individuare uno e un solo triangolo* $A_1A_2A_3$ *inscritto in* Ω *ed avente i due lati* A_2A_3 *e* A_1A_3 *passanti rispettivamente per* B_1 *e* B_2; *il terzo lato* A_1A_2 *di un tale triangolo incontra* $\mathscr{L}$ *in un punto* B_3 *allineato con* B_1 *e* B_2, *il quale risulta esterno ad* Ω.

Mostreremo ora che, con le notazioni dell'ultimo enunciato, se A_3 percorre i $q + 1$ punti situati su Ω e si costruisce di volta in volta il punto B_3 d'intersezione di $\mathscr{L}$ e del lato $A_1 A_2$, tale B_3 percorre esattamente due volte i $(q + 1)/2$ punti di $\mathscr{L}$ esterni ad Ω. Da qui discenderà che i $(q + 1)/2$ punti di $\mathscr{L}$ esterni ad Ω giacciono su di una stessa retta, ottenibile come congiungente due punti distinti scelti ad arbitrio fra i punti di $\mathscr{L}$ interni ad Ω; tale retta non potrà mutare cambiando la scelta di questi due punti, ond'essa s'identificherà necessariamente con $\mathscr{L}$ e sarà esterna rispetto ad Ω, onde il teorema.

Per completare la dimostrazione procederemo per assurdo, ammettendo che – fra i $q + 1$ triangoli inscritti in Ω individuati da un punto A_3 nel modo descritto in v) – se ne abbiano tre distinti e tali da formare a due a due una figura di Desargues dotata dell'asse di omologia B_1B_2. Si ottengono così tre diverse omologie trasformanti quei tre triangoli a due a due l'uno nell'altro, e quindi trasformanti in sè la conica Ω. Ciascuna di tali omologie risulta pertanto armonica ed ha necessariamente per centro il *polo* della retta B_1B_2 rispetto ad Ω. Ma allora quelle tre omologie si riducono ad una stessa omologia, il che non può essere; e questa contraddizione prova l'asserto.

Tralasciamo di investigare se il teorema testé dimostrato continui a sussistere o meno, quando in esso il piano $S_{2,q}$ venga sostituito da un piano lineare (destro o sinistro) sopra un dato corpo infinito (nel senso di [20], n. 81). Osserviamo solo al riguardo che una risposta affermativa per il caso in cui si assumesse quale corpo il campo reale, verrebbe ad avere notevoli applicazioni astronomiche; tuttavia si può dimostrare che la risposta in quest'ultimo caso risulta negativa, ciò che viene a rendere per contrasto ancor più significativo il nostro teorema.

OSSERVAZIONE. — Il precedente teorema suggerisce di investigare gli insiemi $\mathscr{L}$ di punti di $S_{2,q}$ soggetti a condizioni un po' meno restrittive di quelle ivi ammesse per essi. Così, ad esempio, una semplice analisi diretta mostra che (*almeno*) *per* $p = q = 2$ *quel teorema continua a sussistere se, nelle relative ipotesi, in luogo di «ogni corda o tangente» di* Ω *ci si limita a considerare ognuna di tali rette ad eccezione di una sola di esse.*

Del pari si vede agevolmente che (*almeno*) *per* $p = q = 2$ *vale il teorema che si ottiene dal suddetto col porre nelle relative ipotesi, in luogo di «ogni corda o tangente», «ogni retta esterna o tangente» rispetto ad* Ω (mentre invece il risultato cessa di sussistere qualora tali ipotesi vengano ammesse per tutte queste ultime rette tranne una).

BIBLIOGRAFIA

[1] F. BUEKENHOUT (1966) – *Étude intrinsèque des ovales*, «Rendiconti di Matematica», 25, 333–393.

[2] F. BUEKENHOUT (1973) – *Characterizations of Semi Quadrics, A Survey*, «Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie, Atti dei Convegni Lincei, 17» (Roma), 393–421.

[3] R. J. BUMCROT (1971) – *Finite hyperbolic spaces*, «Atti del Convegno di Geometria Combinatoria e sue Applicazioni» (Perugia), 113–130.

[4] M. HALL (1975) – *Ovals in the Desarguesian Plane of order 16*, « Annali di Mat. Pura Appl. », *102*, 159–176.

[5] J. W. P. HIRSCHFELD (1975) – *Ovals in Desarguesian Planes of Even Order*, « Annali di Mat. Pura Appl. », *102*, 79–89.

[6] F. KÁRTESZI (1975) – *Introduction to finite geometries*, Akadémiai Kiadó (Budapest).

[7] G. KORCHMÁROS (1974) – *Osservazioni sui risultati di B. Segre relativi ai k-archi contenenti k — 1 punti di una ovale*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », (8), *56*, 541–549.

[8] G. KORCHMÁROS (1975) – *Su una classificazione delle ovali dotate di automorfismi*, « Rend. Accad. Naz. dei XL », (5), vol. I–II, 1–10.

[9] G. KORCHMÁROS (1975) – *Sulle ovali di traslazione in un piano di Galois d'ordine pari*, in corso di pubblicazione nei « Rend. Accad. Naz. dei XL ».

[10] S. E. PAYNE (1971) – *A complete determination of translation ovoids in finite Desarguesian planes*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », (8), *50*, 328–331.

[11] B. SEGRE (1955) – *Ovals in a finite projective plane*, « Canad. J. Math. », 7, 414–416.

[12] B. SEGRE (1955) – *Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti*, « Annali di Mat. Pura Appl. », *39*, 357–379.

[13] B. SEGRE (1956) – *Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica due*, « Rev. Fac. Sc. Univ. Istanbul », (A) *2*, 97–123.

[14] B. SEGRE (1957) – *Sui k-archi nei piani finiti di caratteristica due*, « Rev. Math. Pures Appl. », *2*, 289–300.

[15] B. SEGRE (1959) – *Le geometrie di Galois*, « Annali di Mat. Pura Appl. », *48*, 1–96.

[16] B. SEGRE (1959) – *Le geometrie di Galois. Archi ed ovali; calotte ed ovaloidi*, « Conferenze Sem. Mat. Univ. Bari », 43–44, 32 pp.

[17] B. SEGRE (1959) – *On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two*, « Acta Arithm. », *5*, 315–332.

[18] B. SEGRE (1960) – *On Galois Geometries*, « Proc. Intern. Congr. Math. (1958) », Cambridge, 488–499.

[19] B. SEGRE (1960) – *Gli spazi grafici*, « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano », *30*, 223–241.

[20] B. SEGRE (1961) – *Lectures on modern geometry*, Cremonese Roma.

[21] B. SEGRE (1961) – *Alcune questioni su insiemi finiti di punti in geometria algebrica*, « Atti conv. Intern. Geometria Algebrica », Torino, 15–33.

[22] B. SEGRE (1962) – *Ovali e curve σ nei piani di Galois di caratteristica due*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », (8) *32*, 785–790.

[23] B. SEGRE (1962) – *Geometry and algebra in Galois spaces* « Abh. Hamburg », *25*, 129–132.

[24] B. SEGRE (1964) – *Arithmetische Eigenschaften von Galois-Räumen*, I, « Math. Ann. », *154*, 195–256.

[25] B. SEGRE (1965) – *Istituzioni di geometria superiore*, vol. II (Istituto Matematico, Roma).

[26] B. SEGRE (1967) – *Introduction to Galois geometries*, « Memorie Accad. Naz. Lincei », VIII, *8*, 137–236.

[27] B. SEGRE e U. BARTOCCI (1971) – *Ovali ed altre curve nei piani di Galois di caratteristica due*, « Acta Arithm. », *8*, 423–449.

[28] B. SEGRE (1973) – *Proprietà elementari relative ai segmenti ed alle coniche sopra un campo qualsiasi ed una congettura di Seppo Ilkka per il caso dei campi di Galois*, « Annali di Mat. Pura Appl. », (4) *96*, 289–337.

[29] B. SEGRE (1973) – *Über Galoische Geometrien*, « Geometrie », Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 100–117.

[30] B. SEGRE (1973) – *Incidence structures and Galois geometries, with special regard to regular involutive corrispondences, arcs, caps, segments and conics*, « Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie, Atti dei Convegni Lincei, 17 » (Roma), 331–367.

[31] B. SEGRE (1977) – *A partial survey of mathematical achievements*, « Commentari Pontificia Academia Scientiarum », vol. III, n. 16.

[32] G. TALLINI (1974) – *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, « Relaz. n. 30, Ist. Mat. Napoli ».

[33] J. A. THAS (1974) – *On semi-ovals and semi-ovoids*, « Geom. Dedicata », *3*, 229–231.