Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Gherardelli

Corpi di numeri e varietà abeliane

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.5, p. 598–605.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_5_598_0>

Geometria algebrica. — *Corpi di numeri e varietà abeliane.* Nota di FRANCESCO GHERARDELLI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — To any number field k, we associate a family of abelian manifolds, generalizing a well known construction if k is totally real.

1. Fissiamo le notazioni ed enunciamo i risultati di questa nota. Indichiamo come d'uso, con $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ rispettivamente i corpi dei numeri razionali, reali, complessi e dei quaternioni.

Sia k un corpo di numeri (algebrici) di grado $n = s + 2t$ su $\mathbf{Q}$, ove s è il numero dei coniugati reali e $2t$ quello dei coniugati complessi di k. Siano poi o l'anello degli interi di k (o, più in generale, un ordine di k), σ_e, $l = 1, \cdots s$, gli isomorfismi distinti di k in $\mathbf{R}$, ρ_m^1, $\overline{\rho}_m^1$, $m = 1, \cdots, t$ gli isomorfismi, a coppie coniugati, di k in $\mathbf{C}$; $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ una base di o su $\mathbf{Z}$ (base fondamentale di k). Pensiamo $\mathbf{R}$ immerso in $\mathbf{C}$ come sua parte reale e $\mathbf{C}$ in $\mathbf{K}$ con un isomorfismo, ρ, determinato, ad esempio, $\rho(a + ib) = a + bj$ ($j \in \mathbf{K}$, $j^2 = -1$). Se $\rho_m^1(\alpha) = a_m + ib_m$, poniamo $\rho_m(\alpha) = a_m + b_m j$.

Allora, l'usuale rappresentazione, χ, dei numeri di k in $\mathbf{R}^s \times \mathbf{C}^t : \chi(\alpha) = (\sigma_1(\alpha), \cdots, \sigma_s(\alpha), \rho_1^1(\alpha), \cdots, \rho_t^1(\alpha))$ (per ogni coppia di isomorfismi coniugati se ne sceglie uno), dà luogo a un modo di operare di o in $\mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t$.

Consideriamo i reticoli Γ in $\mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t$, che sono o–moduli sinistri, liberi, di rango due su o, tramite la rappresentazione χ. L'oggetto del nostro studio sono i quozienti $\mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t/\Gamma$. Essi dànno un esempio di varietà da dirsi $\mathbf{C}$–$\mathbf{K}$–analitiche.

È facile determinare gli o–omomorfismi $\mathbf{C}$–$\mathbf{K}$–analitici fra tali quozienti e in particolare le loro classi di isomorfismo (cfr. n. 2). Il risultato è il seguente: indichiamo con $\mathfrak{h}$ un semipiano di Poincaré (superiore o inferiore) e con $\mathfrak{h}_q$ il cosiddetto semipiano dei quaternioni:

$$\mathfrak{h}_q = \{\tau = x + yj \in \mathbf{K} \, ; x \in \mathbf{C} \, , y \in \mathbf{R} \, , \operatorname{Im} x > 0\}$$

e consideriamo il prodotto $\mathfrak{h}^s \times \mathfrak{h}_q^t = : \mathscr{H}$; è noto (cfr. ad esempio [8], [2]) che il gruppo modulare di Hilbert $\mathrm{L} = \mathrm{SL}_2(o)/\pm 1$ opera in modo discontinuo su $\mathscr{H}$. Qui si dimostra che

TEOREMA 1. *La varietà $\mathscr{H}/\mathrm{L}$ è lo spazio dei moduli dei quozienti $\mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t/\mathrm{L}$, considerati come varietà $\mathbf{C}$–$\mathbf{K}$–analitiche.*

Infine consideriamo la struttura complessa in $\mathbf{K}$ definita da $\mathbf{K} \simeq \mathbf{C} \oplus \oplus \mathbf{C}j \overset{\varphi}{\simeq} \mathbf{C}^2$. Vale il seguente

TEOREMA 2. *Se Γ è un reticolo in $\mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t$, che sia o–modulo sinistro (di rango due su o) tramite la rappresentazione χ, il toro $\mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t/\Gamma$,*

(*) Nella seduta del 14 maggio 1977.

coll'identificazione $\mathbf{K}^t \overset{\varphi}{\simeq} \mathbf{C}^{2t}$, *è una varietà abeliana* (*di dimensione complessa* $n = [k : \mathbf{Q}]$).

Se k è un corpo totalmente reale i teoremi precedenti sono ben noti. In tal caso è anche ben noto che esiste un'immersione naturale di $\mathscr{H}/\mathrm{L}$ nello spazio di Siegel $\mathfrak{S}_n/\Delta$ ove Δ è un opportuno gruppo paramodulare, dipendente dall'anello o. L'osservazione essenziale, valida qualunque sia il campo k, è che su uno spazio vettoriale di dimensione due su k, vi è, a meno di un fattore, una sola forma bilineare alternata invariante per $\mathrm{SL}_2(o)$: la $xy' - x'y$, $x, y, x', y' \in k$. La rappresentazione regolare di k, dà luogo alla forma bilineare alternata

$$(1) \qquad \mathrm{Tr}_{k/\mathbf{Q}}(xy' - x'y)$$

la quale è a valori interi per $x, y, x', y' \in o$. $\mathrm{SL}_2(o)$ si rappresenta così in un sottogruppo del gruppo paramodulare relativo alla (1).

Recentemente, l'immersione di $\mathscr{H}/\mathrm{L}$ nell'appropriato spazio di Siegel è stata studiata in un interessante lavoro da A. Andrianov ([1]) quando k è il corpo quadratico di Gauss, mentre A. I. Vinogradov ([14]) si è occupato dello stesso problema per certe estensioni quadratiche immaginarie di corpi totalmente reali. Qui si riprende brevemente il caso dei campi quadratitici immaginari, rimandando ad altro lavoro un ulteriore esame del caso generale.

La considerazione del semipiano dei quaternioni (come semispazio $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, z > 0\}$ e l'osservazione che $\mathrm{SL}_2(o)$ vi opera in modo discontinuo quando o sia l'anello degli interi di un'estensione quadratica immaginaria, risalgono a Poincaré ([11]) (cfr. anche E. Picard ([10]) e L. Bianchi ([3])). L'estensione di quest'ultimo risultato al caso di un corpo di numeri qualunque, coll'introduzione dello spazio $\mathscr{H}/\mathrm{L}$ è dovuta a vari autori fra cui citiamo C. L. Siegel ([13]), T. Kubota ([8]) T. Asai ([2]).

2. *a*) Trattiamo dapprima, come esempio significativo, il caso dei corpi quadratici immaginari. Siano $1, i, j, k$ ed $1, \lambda, \mu, \nu$ due basi di $\mathbf{K}$ su $\mathbf{R}$ ortonormali e concordemente orientate: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, \cdots$; $\lambda^2 = \mu^2 = \nu^2 = -1$, $\lambda\mu = \nu, \cdots$. Esiste allora (teorema di Hamilton) un quaternione q $(\neq 0)$ tale che $\lambda = q^{-1}iq$, $\mu = q^{-1}jq$, $\nu = q^{-1}jq$. Fissata la base $1, i, j, k$ le funzioni $f(\xi)$ di una variabile quaterniona ξ a valori in $\mathbf{K}$, *derivabili a destra* rispetto a ξ ($\lim \Delta f \cdot (\Delta\xi)^{-1}$ non dipende dalla direzione) sono funzioni $\mathbf{K}$-lineari a destra: $f(\xi) = \mathrm{A}\xi + \mathrm{B}$ (A, B quaternioni, $\xi = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, $x_r \in \mathbf{R}$). Le funzioni $\mathrm{A}\xi q + \mathrm{B} = \mathrm{A}q(q^{-1}\xi q) + \mathrm{B}$ sono funzioni derivabili della variabile $\eta = q^{-1}\xi q = x_0 + x_1\lambda + x_2\mu + x_3\nu$. Questa osservazione suggerisce la seguente:

DEFINIZIONE. *Una funzione* $f(\xi)$, *si dice* $\mathbf{K}$-*analitica se è derivabile* (*a destra*) *in una qualche base* $1, \lambda, \mu, \nu$ *ortonormale e congruente a* $1, i, j, k$. *Diremo cioè* $\mathbf{K}$-*analitiche le funzioni* $\mathrm{A}\xi q + \mathrm{B}$, $\mathrm{A}, \mathrm{B}, q \in \mathbf{K}$. *Una funzione* $\mathbf{K}$-*analitica a destra lo è anche a sinistra e viceversa.*

Da questa definizione ne segue ovvia una di varietà **K**–analitica [1].

b) Una curva ellittica è il quoziente di **C** per un reticolo Γ, cioè per uno **Z**–modulo di rango 2 su **R** , **Z** essendo l'anello degli interi (che è reticolo in **R**). Si sottintende data l'immersione di **R** in **C** come sua parte reale. Cerchiamo di copiare questa definizione partendo da **K** e da un suo reticolo Γ, sostituendo **R** con **C** , **Z** con un anello $o \subset$ **C**, unitario e che sia reticolo in **C**. Ne segue che *o è un ordine di un campo k, estensione quadratica immaginaria di* **Q**. Data l'immersione ρ di **C** in **K** (cfr. n. 1) si supporrà che Γ sia o–modulo sinistro libero (di rango due), tramite ρ. Per semplicità supponiamo anche che o sia l'ordine massimo di k (cioè l'anello degli interi) I quozienti $\mathbf{K}/\Gamma$ li diremo «*curve ellittiche sui quaternioni*». Ad essi si trasportano facilmente alcune fra le prime proprietà delle curve ellittiche. È ovvio intanto che $\mathbf{K}/\Gamma$ è varietà **K**–analitica.

Siano Γ e Γ' reticoli e o–moduli sinistri, $f \colon \mathbf{K}/\Gamma \to \mathbf{K}/\Gamma'$ un o–omomorfismo **K**–analitico. f si può risalire in un'applicazione **K**–analitica $\mathrm{F} : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$, compatibile colle proiezioni canoniche di **K** su $\mathbf{K}/\Gamma$ e su $\mathbf{K}/\Gamma'$ e tale che $\mathrm{F}(0) = 0$. Quindi $\mathrm{F}(\xi) = \alpha\xi q$, $\alpha , q \in \mathbf{K}$, ma di più, per la o–linearità, $\alpha \in \rho(\mathbf{C})$ (i. e. $\alpha = a + bj$, $a , b \in \mathbf{R}$). Infine $\mathrm{F}(\Gamma) \subset \Gamma'$, perciò se $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ è una base di Γ su o ($\omega_i \in \mathbf{K}$) e $\begin{pmatrix}\omega'_1\\ \omega'_2\end{pmatrix}$ una base di Γ' su o, si deve avere:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha\omega_1 q &= a\omega'_1 + b\omega'_2 \\ \alpha\omega_2 q &= c\omega'_1 + d\omega'_2 , \end{aligned}\right. \tag{2}$$

con $a , b, c , d \in \rho(o)$; f è isomorfismo se $ad - bc$ è un'unità di o. Diremo che f è *un isomorfismo stretto* se di più $ad - bc = 1$, cioè

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(o) .$$

Con cambiamenti di coordinate in **K** (**R**–lineari) **K**–analitici ed o–lineari a sinistra, la base $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ di Γ su o si può ridurre a essere del tipo $\begin{pmatrix}\tau\\ 1\end{pmatrix}$ con $\tau = x + yj$; $x \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Im}\, x > 0$, $y \in \mathbf{R}$ (i.e. $\tau \in \mathfrak{h}_q$).

In modo analogo si può procedere per $\Gamma' = \left\{\begin{pmatrix}\theta\\ 1\end{pmatrix}\right\}$, $\theta = x' + y'j$, $\theta \in \mathfrak{h}_q$.

Ne segue facilmente che se i due quozienti $\mathbf{K}/\Gamma$ e $\mathbf{K}/\Gamma'$ sono *strettamente* isomorfi, esistono *unici* τ , $\theta \in \mathfrak{h}_q$ tali che

$$\begin{pmatrix}\tau\\ 1\end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\theta\\ 1\end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad q \in \mathbf{K} , \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(o)$$

(1) Cfr. [9], [6] e l'osservazione finale al n. 4 di questa nota.

ovvero

$$(3) \qquad \tau = (a\theta + b)(c\theta + d)^{-1}.$$

Questa ci dice che

$$\mathfrak{h}_q/\mathrm{PSL}_2(o) \quad , \quad \mathrm{PSL}_2(o) := \mathrm{SL}_2(o)/\pm 1$$

è lo spazio dei moduli delle curve ellittiche su $\mathbf{K}$ (= classi di isomorfismo stretto).

c) $\mathbf{K}$ si può pensare in più modi come spazio vettoriale su $\mathbf{C}$. Qui ci interessano i due casi (entrambi legati all'isomorfismo ρ):

$$\mathbf{K} \simeq \rho(\mathbf{C}) \oplus \rho(\mathbf{C})k \overset{\psi}{\simeq} \mathbf{C}^2$$

$$\mathbf{K} \simeq \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}j \overset{\varphi}{\simeq} \mathbf{C}^2 \ .$$

Nel primo $\psi(\mathbf{K})$ è $\mathbf{C}$–isomorfo a $\rho(\mathbf{C}) \oplus \rho(\mathbf{C})\tau$ e $\psi(\mathbf{K})/\Gamma \simeq \mathbf{C}/o \times \mathbf{C}\tau/o\tau \simeq (\mathbf{C}/o)^2$ è *la superficie abeliana quadrato della curva ellittica a moltiplicazione complessa* $\mathbf{C}/o$.

Per quanto riguarda il secondo caso, in analogia colle curve ellittiche, consideriamo in $\mathbf{K}$ la forma «hermitiana» $\dfrac{2}{\mathrm{Im}\, x}\, \xi\bar{\eta}$ $(\tau = x + yj\,,\ \mathrm{Im}\, x > 0)$. Si pone

$$\frac{2}{\mathrm{Im}\, x}\, \xi\bar{\eta} = \mathrm{H}(\xi\,,\eta) + \mathrm{L}(\xi\,,\eta)j$$

con $\mathrm{H}(\xi\,,\eta)\,,\ \mathrm{L}(\xi\,,\eta) \in \mathbf{C}$. $\mathrm{H}(\xi\,,\eta)$ è *forma hermitiana definita positiva*. Per provare che $\varphi(\mathbf{K})/\Gamma$ è superficie abeliana basta verificare che $\mathrm{Im}\,\mathrm{H}(\xi\,,\eta)$ è a valori interi su $\Gamma \times \Gamma$. Posto $\xi = u + vk\,,\ \eta = u' + v'k\,,\ u\,,v\,,u'\,,v' \in q(\mathbf{C})$, si verifica subito che $\mathrm{Im}\,\mathrm{H}(\xi\,,\eta) = -\dfrac{2}{\mathrm{Im}\, x}\,\mathrm{Re}\,[(vu' - uv')j]$; se poi $\xi\,,\eta \in \Gamma$, cioè $\xi = \alpha\tau + \beta\,,\ \eta = \gamma\tau + \delta\,,\ \alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\delta \in o$, allora

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{H}(\xi\,,\eta) = \mathrm{Re}\, 2(\alpha\delta - \beta\gamma) = \mathrm{Tr}_{k/\mathbf{Q}}(\alpha\delta - \beta\gamma) \in \mathbf{Z}.$$

Se ad esempio $k = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ $d = 2\,,3 \pmod 4$ e quindi $o = \mathbf{Z}[\sqrt{d}]$, $\varphi(\mathbf{K})/\Gamma$ è definito dalla matrice di Riemann

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x & -\sqrt{-d}\,y \\ 0 & d & -\sqrt{-d}\,y & d\,\bar{x} \end{pmatrix}$$

Indichiamo con $\mathfrak{S}_2$ il semipiano di Siegel delle matrici 2×2 simmetriche a parte immaginaria positiva. L'immersione $\mathfrak{h}_q \to \mathfrak{S}_2$ data da

$$x + yj = \tau \to \begin{pmatrix} x & -\sqrt{-d}\,y \\ -\sqrt{-d}\,y & d\bar{x} \end{pmatrix}$$

induce un'immersione biunivoca di $\mathfrak{h}_q/\mathfrak{S}\mathrm{L}_2(o)$ in $\mathfrak{S}_2/\Delta$ dove Δ è il gruppo (paramodulare) delle trasformazioni intere unimodulari che lasciano invariante la forma bilineare

$$\mathrm{Tr}_{k/\mathbf{Q}}[vu' - uv']\,, \qquad u\,,v \in k\,.$$

Ciò permette di definire delle forme su $\mathfrak{h}_q$ automorfe rispetto a $SL_2(o)$ come restrizioni di forme analitiche su $\mathfrak{S}_2$, automorfe rispetto a Δ. (Va osservato che tale restrizione è ben definita).

3. Passiamo a trattare rapidamente il caso di un campo di numeri qualunque. Consideriamo i quozienti $\mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t/\Gamma$ ove Γ è un reticolo, che sia o–modulo sinistro nel modo specificato al n. 1. Le varietà $X: \mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t/\Gamma$ sono varietà $\mathbf{C}$–$\mathbf{K}$–analitiche nel senso seguente. Su X esistono atlanti $\{u_\alpha\}$ con coordinate (z_α, ζ_α), $z_\alpha = (z_{\alpha,1}, \cdots, z_{\alpha,s})$, $\zeta_\alpha = (\zeta_{\alpha,1}, \cdots, \zeta_{\alpha,t})$, $z_{\alpha,l} \in \mathbf{C}$, $\zeta_{\alpha,m} \in \mathbf{K}$, tali che in $U_\alpha \cap U_\beta (\neq \varnothing)$ si abbia

$$z_{\beta,l}, = f_{\alpha\beta,l}(z_\alpha, \zeta_\alpha), \ \zeta_{\beta,m} = \varphi_{\alpha\beta,m}(z_\alpha, \zeta_\alpha)$$

colle $f_{\alpha\beta,l}$, $\varphi_{\alpha\beta,m}$ funzioni analitiche complesse delle z_α e $\mathbf{K}$–analitiche delle ζ_α, che soddisfano un'ovvia condizione di coerenze in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma (\neq \varnothing)$. (Da questa definizione segue subito che le $f_{\alpha\beta,l}$ sono funzioni olomorfe delle sole z_α e che $\varphi_{\alpha\beta,m}$ è del tipo $\sum_{j=1}^{t} \gamma_{\alpha\beta mj} \zeta_{\alpha,j} q_{\alpha\beta,mj} + \delta_{\alpha\beta,m}(z_\alpha)$ colle $\gamma_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ quaternioni (costanti) e le $\delta_{\alpha\beta}$ funzioni olomorfe delle z_α).

Consideriamo ora in $\mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t$ due reticoli Γ e Γ', che siano o–moduli sinistri e i relativi quozienti

$$X = \mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t/\Gamma \quad . \quad X' \ \mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t/\Gamma'$$

Γ è generato su o da due vettori che scriviamo come righe della matrice

$$\begin{pmatrix} x_{11}, \cdots, x_{1s} & \xi_{11}, \cdots, \xi_{1t} \\ x_{21}, \cdots, x_{2s} & \xi_{21}, \cdots, \xi_{2t} \end{pmatrix} \quad x_{il} \in \mathbf{C} \quad , \quad \xi_{i,m} \in \mathbf{K}$$

e così Γ' da

$$\begin{pmatrix} y_{11}, \cdots, y_{1s} & \eta_{11}, \cdots, \eta_t \\ y_{21}, \cdots, y_{2s} & \eta_{21}, \cdots, \eta_{2t} \end{pmatrix} \quad y_{il} \in \mathbf{C} \quad , \quad \eta_{im} \in \mathbf{K}.$$

Un'applicazione $f: X \to Y$ si dirà $\mathbf{C} - \mathbf{K}$–analitica se è compatibile colle strutture $\mathbf{C} - \mathbf{K}$ di X e Y. Se $F: \mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t \to \mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t$ è un risalimento di f, F si rappresenta con equazioni

$$(4) \qquad \begin{cases} \vartheta_m = \sum_{j=1}^{t} \gamma_{mj} \zeta_j q_{mj} + \delta_m(z_1, \cdots, z_s), & l = 1, \cdots, s \\ u_l = f_l(z_1, \cdots z_s) & m = 1, \cdots, t, \end{cases}$$

dove le f_l e δ_m sono funzioni olomorfe delle z, γ_{mj}, q_{mj} sono quaternioni (costanti) e si può supporre $F(0) = 0$.

Se di più f è un o–omomorfismo (a sinistra) allora, poiché qualunque sia $\gamma \in \Gamma$, $x \in \mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t$, $F(x + \gamma) = F(x) + \gamma'$ con $\gamma' \in \Gamma'$, le derivate $\partial f_l/\partial z_j$, $\partial \delta_m/\partial z_j$ sono funzioni olomorfe limitate e quindi costanti e le f_l, δ_m sono lineari.

La o–linearità implica infine che le (4) si riducano alle

$$(5)\qquad \begin{cases} u_l = \beta_l z_l & l = 1, \cdots, s \\ \vartheta_m = \gamma_m \zeta_m q_m & m = 1, \cdots, t, \end{cases}$$

dove $\beta_l \in \mathbf{C}$, $\gamma_m \in \rho(\mathbf{C})$, $q_m \in \mathbf{K}$.

Poiché F proviene da f le costanti β, γ, q devono soddisfare equazioni del tipo

$$(6)\qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} x_{1l} \\ x_{2l} \end{pmatrix} \beta_l = \begin{pmatrix} a_l b_l \\ c_l d_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1l} \\ y_{2l} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma_m & 0 \\ 0 & \gamma_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1l} \\ \xi_{2m} \end{pmatrix} q_m = \begin{pmatrix} a'_m b'_m \\ c'_m d'_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{1m} \\ \eta_{2m} \end{pmatrix} \end{cases}$$

ove $a, b, c, d \in o$ ed $a_l, b_l, \cdots, d'_m$ sono le rappresentazioni σ_l e ρ_m di a, b, c, d. In particolare se f è isomorfismo det $\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$ è un'unità di o. Diremo che f è *un isomorfismo stretto* se di più $\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(o)$. *D'ora innanzi considereremo soltanto classi di isomorfismo stretto* (le (6) sono ora relazioni di equivalenza).

Dalle (6) segue subito che ogni reticolo Γ, che sia o–modulo è equivalente a un reticolo generato dalle righe della matrice

$$(7)\qquad \begin{pmatrix} x_1, \cdots, x_s; \tau_1, \cdots, \tau_t \\ 1, \cdots, 1 ; 1, \cdots, 1 \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbf{C} \quad , \quad \tau \in \mathbf{K}.$$

Poiché Γ è reticolo $\operatorname{Im} x_l \neq 0$ per ogni $l = 1, \cdots, s$ e per la seconda delle (6) si può anche supporre $\tau_m = p_m + s_m j$ con $s_m \in \mathbf{R}$, $p_m \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} p_m > 0$ $m = 1, \cdots, t$. Due classi siffatte definiscono reticoli equivalenti se

$$\begin{cases} x_l = (a_l y_l + b_l)/(c_l y_l + d_l) & l = 1, \cdots, s \\ \tau_m = (a'_m \vartheta_m + b'_m)(c'_m \vartheta_m + d'_m)^{-1} & m = 1, \cdots, t \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(o)$ e $\operatorname{Im} x_l$, $\operatorname{Im} y_l$ sono contemporaneamente o positivi o negativi.

Si conclude col

TEOREMA 1. *Lo spazio dei moduli dei quozienti* $\mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t/\Gamma$ (*Γ reticolo e o–modulo*) *come varietà* **C**–**K**–*analitiche è dato da* $\mathcal{H}/\mathrm{L}$ *ove* $\mathcal{H}$ *è il prodotto di s semipiani di Poincaré – alcuni superiori altri inferiori – per t semipiani dei quaternioni ed* L *è il gruppo* $\mathrm{PSL}_2(o)$ (*gruppo speciale proiettivo*), *che opera sui singoli fattori tramite la rappresentazione* χ.

4. Consideriamo ora i quozienti $X := \mathbf{C}^s \times \mathbf{K}^t/\Gamma$ colla struttura complessa indotta dall'isomorfismo $\mathbf{K} \simeq \mathbf{C} + \mathbf{C}j \overset{\psi}{\simeq} \mathbf{C}^2$.

Si vuol verificare che esiste *una forma hermitiana* H *su* $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ $(n = s + 2t)$ *definita positiva e tale che* $\operatorname{Im} H$ *sia a valori interi su* $\Gamma \times \Gamma$ (cioè che X è varietà abeliana).

Partiamo dalla base di Γ su o data dalle righe della (7) $(\operatorname{Im} x_l \neq 0, l = 1, \cdots, s)$. *Sostituendo eventualmente a* Γ *un reticolo isogeno, si può supporre* $\operatorname{Im} x_l > 0$. Infatti, per il teorema di indipendenza delle metriche si può trovare $w \in k$ tale che $|\sigma_l(w) - \operatorname{Im} x_l| < \varepsilon$ con $0 < \varepsilon < |\operatorname{Im} x_l|$ per $l = 1, \cdots, s$; quindi $\sigma_l(w)$ ha lo stesso segno di $\operatorname{Im} x_l$ e $\operatorname{Im}(\sigma_l(w) x_l) > 0$. Si può poi scegliere w intero (algebrico). I vettori riga della matrice

$$\begin{pmatrix} \cdots & \sigma_e(w) x_e \cdots \rho_m(w) x_m \\ \cdots & 1 \quad \cdots \quad 1 \end{pmatrix}$$

generano su o un reticolo $\Gamma_1 \subset \Gamma$, di indice finito in Γ, perché ha lo stesso rango di Γ. Come si è osservato verso la fine del n. precedente, si può supporre (senza alterare $\sigma_l(w) x_l$) che sia $\rho_m(w) \tau_m = p_m + s_m j$ con $s_m \in \mathbf{R}$, $p_m \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} p_m > 0$, $m = 1, \cdots, t$. Ciò premesso non c'è che da mettere insieme i casi dei corpi quadratici reali e complessi.

In $\mathbf{C}$ si considerano le forme hermitiane

$$h_l(z_l, w_l) = \frac{1}{\operatorname{Im} x_e} z_l \overline{w}_l \qquad l = 1, \cdots, s$$

e in $\mathbf{K}$ le

$$\frac{2}{\operatorname{Im} p_m} \xi_m \overline{\eta}_m \qquad m = 1, \cdots, t,$$

Si ha

$$\frac{2}{\operatorname{Im} p_m} \xi_m \overline{\eta}_m = H_m(\xi_m, \eta_m) + L_m(\xi_m, \eta_m) j$$

dove $H_m(\xi_m, \eta_m) \in \mathbf{C}$ è hermitiana definita positiva. Posto $\xi = (z_1, \cdots, z_s; \xi_1, \cdots, \xi_t)$, $\eta = (w_1, \cdots, w_s; \eta_1, \cdots, \eta_t)$, ne segue che è definita la forma hermitiana

$$H(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^{s} h_l(z_l, w_l) + \sum_{l=1}^{s} H_m(\xi_m, \eta_m).$$

Esattamente come al n. 2 si verifica poi che se $\xi, \eta \in \Gamma$, cioè $\xi = \alpha\tau + \beta$, $\eta = \gamma\tau + \delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in o$, allora

$$\operatorname{Im} H_m(\xi_m, \eta_m) = 2 \operatorname{Re}(\alpha'_m \delta'_m - \beta'_m \gamma'_m)$$

$\alpha'_m, \cdots$ coniugati complessi di $\alpha, \cdots$. Infine:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} H(\xi, \eta) &= \sum_{l=1}^{s} (\alpha_l \delta_l - \beta_l \gamma_l) + \sum_{m=1}^{t} 2 \operatorname{Re}(\alpha'_m \delta'_m - \beta'_m \gamma'_m) \\ &= \operatorname{Tr}_{k/\mathbf{Q}}(\alpha\delta - \beta\gamma) \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Si conclude che il quoziente $\mathbf{C}^s \times \mathbf{C}^{2t}/\Gamma$, da cui siamo partiti, isogeno ad una varietà abeliana è esso stesso algebrico (Teorema 2) [2].

(2) Assumendo soddisfatte le ipotesi $\operatorname{Im} x_e > 0$, $\operatorname{Im} p_m > 0$, l'algebricità di $\mathbf{C}^{s+2t}/\Gamma$ è provata da SIEGEL in [13] scrivendo esplicitamente le relative serie theta.

OSSERVAZIONI. *a*) Gli isomorfismi rispettivamente su $\mathbf{C}$ e su $\mathbf{R} : \mathbf{K} \simeq \simeq \rho(\mathbf{C}) \oplus \rho(\mathbf{C}) k \overset{\psi}{\simeq} \mathbf{C}^2$, $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \simeq \mathbf{R}^2$ conducono a leggere il reticolo Γ in $\mathbf{R}^{2s} \times \mathbf{C}^{2t}$. Si riconosce senza difficoltà che ora, qualunque sia l'o-modulo Γ, $\mathbf{R}^{2s} \times \mathbf{C}^{2t}/\Gamma$ è equivalente al quadrato di $\mathbf{R}^s \times \mathbf{C}^t/o$, ove $\mathbf{R}^s \times \mathbf{C}^t/o$ è il toro con struttura $\mathbf{C}$–$\mathbf{R}$, che si ottiene dalla rappresentazione «standard», χ, degli interi di k in un reticolo di $\mathbf{R}^s \times \mathbf{C}^t$.

b) Le superficie abeliane definite dalle matrici di Riemann

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & y & -\bar{x} \end{pmatrix} \quad \operatorname{Im} x > 0 \ , \ y \in \mathbf{R}$$

sono state incontrate da Comessatti ([4]) come *superficie abeliane non reali, la cui associata superficie di Kummer è reale.*

c) Terminiamo osservando che la nozione di funzione $\mathbf{K}$-analitica è strettamente connessa a quelle di varietà differenziabile a gruppo strutturale $\subset Sp(n) \cdot Sp(1)$ (cfr. ad esempio [9], [6]).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. N. ANDRIANOV (1971) – *Serie di Dirichlet*, «Trudi Ac. S. Math.», *112*, 73–94 (in russo).

[2] T. ASAI (1970) – *On a certain function analogous to* $\log |\eta(x)|$, «Nagoya Math. J.», *40*, 193–211.

[3] L. BIANCHI (1891) – *Geometrische Darstellung der Gruppe linearer Substitutionen mit ganzen complexen Coefficienten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie*, «Math. Am.», *38*, 313 e segg. (oppure «Opere», vol. I).

[4] A. COMESSATTI (1924–1925) – *Sulle varietà abeliane reali*, Memorie 1ª e 2ª «Ann. di Mat.», *2* (1924) e *3* (1925).

[5] R. FUETER (1931) – *Über automorphe Functionen der Picard'schen Gruppe* I, «Comm. Math. Helv.», *3*, 42–68.

[6] A. GRAY (1969) – *A note on manifolds whose holonomy group is a subgroup of* $Sp(n)$. $Sp(1)$, «Mich. Math. J.», *16*, 125–128.

[7] K. KATAYAMA (1962) – *On the Hilbert-Siegel modular group and abelian varieties*, «J. Fac. Sc. Tokio», Sec. I, *9*, 261–291.

[8] T. KUBOTA (1968) – *Über discontinuierlicher Gruppen Picardschen Typus und zugehorige Eisensteinsche Reihen*, «Nagoya Math. J.», *32*, 259–271.

[9] E. MARTINELLI (1959) – *Varietà a struttura quaternionale generalizzata*, «Rend. Acc. Lincei», ser. VIII, *26*, 353–362.

[10] E. PICARD (1884) – *Sur un groupe de transformations* ..., «Bull. Soc. Math. de France», *12*, 43–47.

[11] H. POINCARÉ (1883–84) – *Memoire sur les fonctionnes kleinéens*, «Acta Math.», *3*, 49–91.

[12] C. L. SIEGEL (1937) – *Über die analytische Theorie der quadratische Formen* III, «Ann. of Math.», *38*, 212–291.

[13] C. L. SIEGEL (1952) – *Indefinite quadratische Formen und Funktionen-theorie* II. «Math. Ann.», *124*, 364–387.

[14] A. I. VINOGRADOW (1975) – *Sulle forme modulari di Hilbert e Siegel* «J. für Math. (Crelle)», *274–75* (in russo).