
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARIA TERESA VACCA

**Sulle equazioni del moto impulsivo dei sistemi
anolonomi**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 62 (1977), n.4, p. 509–515.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_4_509_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sulle equazioni del moto impulsivo dei sistemi anolonomi*^(*). Nota di MARIA TERESA VACCA, presentata^(**) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper by the fundamental Gauss' principle of least constraint we obtain the impulse-dynamical equations of a non-holonomic system. We consider in particular the impulse-motion of a solid which rolls without slipping on a fixed plane and we apply this to the case of the sphere and to the case of a solid with gyroscopic structure which rolls along a projecting circular ridge having the gyroscopic axis for axis; the second case may be reduced to that of the circle.

1. Le equazioni del moto impulsivo di un sistema olonomo o anolonomo con vincoli bilaterali e privi di attrito si possono dedurre come si sa partendo dall'equazione simbolica di D'Alembert⁽¹⁾.

In questa Nota mi propongo di stabilire esplicitamente le dette equazioni per un sistema anolonomo applicando invece il *principio della minima costrizione o di Gauss*.

Con riferimento a un sistema di N punti materiali P_i di massa m_i , sollecitati da forze $\mathbf{F}_i$ e di accelerazione $\mathbf{a}_i$, la costrizione Γ del sistema è definita, come è ben noto, da

$$(1.1) \quad \Gamma = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\mathbf{a}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2$$

e il principio della minima costrizione afferma che il moto del sistema è caratterizzato dal rendere minima la costrizione nel passaggio dal sistema di accelerazioni del moto naturale ad ogni altro sistema di accelerazioni infinitamente vicine e compatibili coi vincoli.

Avremo quindi, se $\delta \mathbf{a}_i$ è la variazione di ciascuna accelerazione,

$$(1.2) \quad \delta \Gamma = \sum_i m_i \left(\mathbf{a}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right) \times \delta \mathbf{a}_i = \sum_i (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \times \delta \mathbf{a}_i = 0.$$

Supponiamo ora che a partire da un istante generico t_0 , e per un tempo τ che faremo tendere a zero, agiscano sui punti del sistema degli impulsi che incrementino le forze $\mathbf{F}_i$ di $\mathbf{I}_i$ e le velocità $\mathbf{v}_i$ di $\Delta \mathbf{v}_i$, mentre i vincoli (e le altre grandezze che si suppongono continue) restano invariati. Integrando allora

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 16 aprile 1977.

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, Vol. II, P. II, Cap. XII, Zanichelli, Bologna, 1927.

la (1.2) da t_0 a $t_0 + \tau$ e passando al limite per $\tau \rightarrow 0$ si ha

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_1^N \left(m_i \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{a}_i dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}_i dt \right) \times \delta \mathbf{a}_i = 0$$

cioè

$$(1.3) \quad \sum_1^N (m_i \Delta \mathbf{v}_i - \mathbf{I}_i) \times \delta \mathbf{a}_i = 0.$$

Se supponiamo ancora che la configurazione del sistema si possa individuare in ogni istante mediante la conoscenza di $\underline{n}$ parametri lagrangiani $q_1, q_2, \dots, q_n$, dalle relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial t} + \sum_1^n \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \\ \mathbf{a}_i &= \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \sum_1^n \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_r} \dot{q}_r + \sum_1^n \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_r} \ddot{q}_r \end{aligned}$$

si ricava

$$\delta \mathbf{a}_i = \sum_1^n \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_r} \delta \ddot{q}_r = \sum_1^n \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial q_r} \delta \ddot{q}_r.$$

Sostituendo nella (1.3) si ottiene

$$(1.4) \quad \sum_1^n \left\{ \Delta \left(\sum_1^N m_i \mathbf{v}_i \right) \times \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_r} - \mathbf{J}_r \right\} \delta \ddot{q}_r = 0$$

dove le

$$(1.5) \quad \mathbf{J}_r = \sum_1^N \mathbf{I}_i \times \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial q_r}$$

sono le *componenti lagrangiane degli impulsi*.

Introducendo l'energia cinetica $T = \frac{1}{2} \sum_1^N m_i \mathbf{v}_i^2$ del sistema, la (1.4) si può scrivere

$$(1.6) \quad \sum_1^n \left(\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \mathbf{J}_r \right) \delta \ddot{q}_r = 0.$$

Se si tratta di un sistema olonomo le $\delta \ddot{q}_r$ sono tutte arbitrarie e allora uguagliando a zero tutti i coefficienti delle $\delta \ddot{q}_r$ si ottengono le equazioni del moto impulsivo di un sistema olonomo con $\underline{n}$ gradi di libertà.

Nel caso di un sistema anolonomo esso sarà soggetto a ulteriori $\underline{m}$ ($m < n$) vincoli di mobilità anolonomi della forma

$$(1.7) \quad b_{k0} + \sum_1^n b_{kr} \dot{q}_r = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

dove le b_{k0}, b_{kr} sono funzioni continue delle q_r ed eventualmente del tempo.

Derivando le (1.7) rispetto al tempo si ha

$$\frac{db_{k0}}{dt} + \sum_1^n \left(\frac{db_{kr}}{dt} \dot{q}_r + b_{kr} \ddot{q}_r \right) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

e considerando le variazioni di queste relazioni in cui, conformemente al principio della minima costrizione, variano soltanto le accelerazioni, si ottiene

$$(1.8) \quad \sum_1^n b_{kr} \delta \ddot{q}_r = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

In questo caso allora le equazioni (1.6) devono essere verificate per valori delle $\delta \ddot{q}_r$ non tutte arbitrarie, ma che soddisfano anche le condizioni (1.8).

Scrivendo le (1.8) nella forma

$$\sum_1^m b_{hk} \delta \ddot{q}_k = - \sum_1^{n-m} b_{h,m+\rho} \delta \ddot{q}_{m+\rho}, \quad (h = 1, 2, \dots, m),$$

supponendo diverso da zero il determinante di ordine m delle b_{hk} e indicando con B^{hk} l'elemento reciproco di b_{hk} in questo determinante, si ricava

$$(1.9) \quad \delta \ddot{q}_k = - \sum_1^m B^{hk} \sum_1^{n-m} b_{h,m+\rho} \delta \ddot{q}_{m+\rho}, \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Così pure l'equazione (1.6) si può scrivere

$$\sum_1^m \left(\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - J_k \right) \delta \dot{q}_k + \sum_1^{n-m} \left(\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\rho}} - J_{m+\rho} \right) \delta \dot{q}_{m+\rho} = 0$$

e sostituendo in luogo delle $\delta \ddot{q}_k$ i valori (1.9) si ottiene

$$\sum_1^{n-m} \left\{ \Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\rho}} - J_{m+\rho} - \sum_1^m B^{hk} b_{h,m+\rho} \left(\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - J_k \right) \right\} \delta \dot{q}_{m+\rho} = 0$$

dove le $\delta \dot{q}_{m+\rho}$, ($\rho = 1, 2, \dots, n-m$), sono ora tutte arbitrarie e pertanto si deducono, per il moto impulsivo del sistema anolonomo considerato, le seguenti equazioni

$$(1.10) \quad \Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+\rho}} - J_{m+\rho} - \sum_1^m B^{hk} b_{h,m+\rho} \left(\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - J_k \right) = 0, \\ (\rho = 1, 2, \dots, n-m),$$

alle quali vanno associate le equazioni impulsive che derivano dalle condizioni di anolonomia (1.7) e cioè le

$$(1.11) \quad \sum_1^n b_{hr} \Delta \dot{q}_r = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, m).$$

Da queste, analogamente alle (1.9), si ricava

$$(1.12) \quad \Delta \dot{q}_k = - \sum_1^{n-m} \left(\sum_1^m B^{hk} b_{h,m+\rho} \right) \Delta \dot{q}_{m+\rho}, \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Poiché nel caso più generale è

$$T = T_0 + \sum_1^n a_{r0} \dot{q}_r + \frac{1}{2} \sum_1^n a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$$

e quindi

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = a_{r0} + \sum_1^n a_{rs} \dot{q}_s,$$

risulta

$$(1.13) \quad \Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \sum_1^n a_{rs} \Delta \dot{q}_s, \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

In virtù delle (1.12) e delle (1.13) le equazioni (1.10) si riducono ad $n - m$ equazioni lineari negli $n - m$ incrementi $\Delta \dot{q}_{m+p}$ delle $n - m$ velocità lagrangiane $\dot{q}_{m+p}$ e forniscono questi $n - m$ incrementi in funzione degli impulsi.

Dopo ciò le (1.12) danno i rimanenti incrementi $\Delta \dot{q}_k$, ($k = 1, 2, \dots, m$).

2. Nel caso di un solido che rotola senza strisciare su un piano fisso (orizzontale) le equazioni del moto impulsivo si possono stabilire direttamente partendo dall'equazione simbolica del moto di un solido:

$$(2.1) \quad \left(\mathbf{R}^{(a)} - \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right) \times \delta \mathbf{G} + \left(\mathbf{M}^{(a)} - \frac{d\mathbf{K}}{dt} \right) \times \delta \omega = 0,$$

dove $\mathbf{R}^{(a)}$ è il risultante delle forze attive ed $\mathbf{M}^{(a)}$ il momento risultante rispetto al baricentro G, $\mathbf{Q}$ la quantità di moto del solido e $\mathbf{K}$ il momento della quantità di moto rispetto al baricentro; $\delta \mathbf{G}$ e $\delta \omega$ sono uno spostamento virtuale del baricentro e una rotazione virtuale intorno a G, compatibili coi vincoli.

Se supponiamo che alcune delle forze abbiano carattere di percosse agenti all'istante t_0 , ponendo

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{R}^{(a)} dt &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_1^N \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}_i dt = \sum_1^N \mathbf{I}_i = \mathbf{J}, \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} dt &= \Delta \mathbf{Q} = m \Delta \mathbf{v}_G, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{d\mathbf{K}}{dt} dt = \Delta \mathbf{K}, \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{M}^{(a)} dt &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_1^N (\mathbf{P}_i - \mathbf{G}) \wedge \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}_i dt = \sum_1^N (\mathbf{P}_i - \mathbf{G}) \wedge \mathbf{I}_i = \vec{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

dove $\mathbf{J}$ è il risultante degli impulsi ed $\vec{\mathcal{M}}$ il momento risultante degli impulsi rispetto al baricentro, l'equazione (2.1), dopo integrazione rispetto al tempo da t_0 a $t_0 + \tau$ e passaggio al limite per $\tau \rightarrow 0$, porge

$$(2.2) \quad (\mathbf{J} - \Delta \mathbf{Q}) \times \delta \mathbf{G} + (\vec{\mathcal{M}} - \Delta \mathbf{K}) \times \delta \omega = 0.$$

Trattandosi di un solido che rotola senza strisciare su un piano fisso (orizzontale) se $\underline{\mathbf{H}}$ è il punto di contatto all'istante $\underline{t}$ col piano di appoggio, in

quell'istante la velocità del punto H è nulla, cioè

$$(2.3) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{dG}{dt} + \omega \wedge (H - G) = 0.$$

Da questa condizione di anolonomia si ricava

$$(2.4) \quad \frac{dG}{dt} = \omega \wedge (G - H), \quad (2.5) \quad \delta G = \delta \omega \wedge (G - H)$$

e pertanto nella (2.2) δG e $\delta \omega$ non sono del tutto arbitrari, ma sono legati dalla condizione (2.5).

Si ha inoltre

$$\begin{aligned} \Delta Q &= m \Delta v_G, \quad \sum_1^N m_i (P_i - G) = 0, \\ \Delta K &= \Delta \left\{ \sum_1^N (P_i - G) \wedge m_i v_i \right\} = \sum_1^N (P_i - G) \wedge m_i \Delta v_i = \\ &= \sum_1^N (P_i - G) \wedge m_i \Delta [v_G + \omega \wedge (P_i - G)] = \\ &= - \sum_1^N m_i (P_i - G) \wedge [(P_i - G) \wedge \Delta \omega] = \sigma \Delta \omega, \end{aligned}$$

dove

$$\sigma = - \sum_1^N m_i (P_i - G) \wedge [(P_i - G) \wedge]$$

è l'omografia d'inerzia del solido relativa al baricentro. Inoltre $\Delta \omega$ rappresenta l'incremento della velocità angolare ω dovuto agli impulsi.

L'equazione (2.2) diventa pertanto

$$(2.6) \quad \{(G - H) \wedge (J - m \Delta v_G) + (\vec{M} - \sigma \Delta \omega)\} \times \delta \omega = 0,$$

dove $\delta \omega$ è ora arbitrario; perciò per il solido considerato si ha la seguente equazione del moto impulsivo

$$(2.7) \quad (G - H) \wedge (J - m \Delta v_G) + \vec{M} - \sigma \Delta \omega = 0.$$

Ma dalla (2.4) si deduce ancora

$$(2.8) \quad \Delta v_G = \Delta \omega \wedge (G - H),$$

sostituendo nella (2.7) si ha infine

$$(2.9) \quad (G - H) \wedge J + \vec{M} - \{\sigma - m (G - H) \wedge [(G - H) \wedge]\} \Delta \omega = 0.$$

Dato l'impulso J e il momento $\vec{M}$ dell'impulso, conoscendo la struttura del corpo, la (2.9) fornisce l'incremento della velocità angolare di rotazione (o le sue componenti), dovuto all'impulso. La (2.8) dà poi l'incremento della velocità del baricentro.

a) Nel caso di una sfera omogenea pesante di raggio a e massa m , rotolante su un piano orizzontale, con riferimento a tre assi cartesiani ortogonali fissi x, y, z con l'asse z positivo verso l'alto e di versori i, j, k , si ha

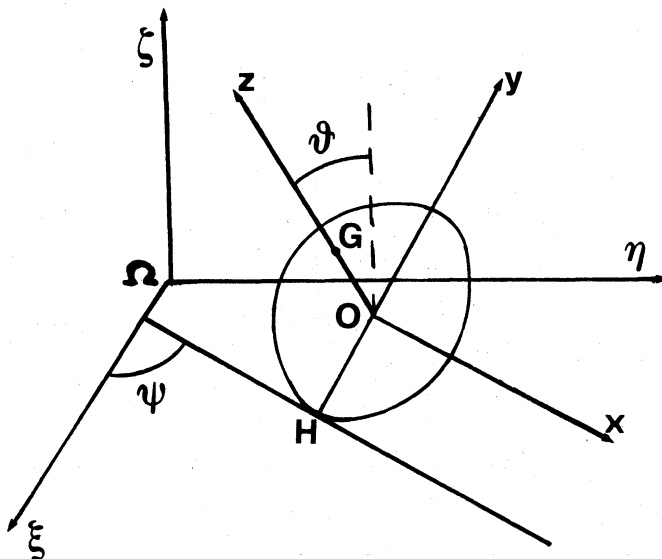
$\sigma \Delta \omega = \frac{2}{5} m a^2 \Delta \omega$, $m (G - H) \wedge [(G - H) \wedge \Delta \omega] = - m a^2 (\Delta \omega - \Delta \omega \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{k})$,
e indicando con $\Delta \omega_1, \Delta \omega_2, \Delta \omega_3$ le componenti di $\Delta \omega$, la (2.9) porge per queste componenti i seguenti valori

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \Delta \omega_1 &= \frac{5}{7} (\mathcal{M}_x - a J_y) \frac{1}{m a^2} \\ \Delta \omega_2 &= \frac{5}{7} (\mathcal{M}_y + a J_x) \frac{1}{m a^2} \\ \Delta \omega_3 &= \frac{5}{2} \mathcal{M}_z \frac{1}{m a^2} \end{aligned}$$

e conseguentemente dalla (2.8) si ha

$$(2.11) \quad \Delta v_{Gx} = a \Delta \omega_2, \quad \Delta v_{Gy} = -a \Delta \omega_1, \quad (v_{Gz} = 0).$$

b) Come altro esempio consideriamo il caso di un solido, a struttura giroscopica intorno a un asse baricentrale, rotolante su un piano orizzontale fisso secondo un risalto circolare avente per asse l'asse giroscopico. Sia O il centro del cerchio, a il suo raggio ed H il punto di contatto col piano di appoggio. Riferiamo il solido a una terna di assi stereonodali xyz con l'origine in O, l'asse x diretto parallelamente alla tangente al cerchio nel punto di contatto H, l'asse y secondo la retta HO e l'asse z diretto in modo che la terna xyz , di vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, sia destrorsa. L'asse Oz non è altro che l'asse giroscopico; supponiamo che il baricentro G si trovi su quest'asse a una distanza z_0 dal centro O del cerchio.



Indichiamo con ψ l'angolo che la direzione dell'asse x forma con l'asse fisso $\Omega \zeta$ del piano di appoggio, con ϑ l'angolo che l'asse Oz forma con la direzione dell'asse verticale ascendente $\Omega \zeta$ e con φ l'angolo di rotazione del risalto circolare intorno al suo centro. Le componenti P, Q, R della velocità angolare di rotazione della terna mobile O (xyz) secondo questi stessi assi sono ⁽²⁾

$$(2.12) \quad P = \dot{\vartheta}, \quad Q = \dot{\psi} \sin \vartheta, \quad R = \dot{\psi} \cos \vartheta = Q \operatorname{ctg} \vartheta$$

(2) Cfr. P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, ch. XXI, n. 411, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

e le componenti della velocità angolare ω del solido secondo i medesimi assi sono

$$(2.13) \quad \dot{p} = P = \dot{\vartheta} \quad , \quad \dot{q} = Q = \dot{\psi} \sin \vartheta \quad , \quad \dot{r} = R + \dot{\varphi} = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\phi}.$$

Detti $A, B = A, C$ i momenti principali d'inerzia del corpo rispetto agli assi per G , paralleli ad x, y, z , le componenti di $\sigma \Delta \omega$ risultano $A \Delta p, A \Delta q, C \Delta r$. Si ha inoltre

$$G - H = (G - O) + (O - H) = a \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$$

$$m (G - H) \wedge [(G - H) \wedge \Delta \omega] = -m [(a^2 + z_0^2) \Delta \omega - (a \Delta q + z_0 \Delta r) (G - H)].$$

Proiettando allora la (2.9) sugli assi x, y, z si deducono le seguenti equazioni

$$[A + m(a^2 + z_0^2)] \Delta p = \mathcal{M}_x + a J_z - z_0 J_y$$

$$(2.14) \quad [A + m z_0^2] \Delta q - m a z_0 \Delta r = \mathcal{M}_y + z_0 J_x$$

$$(C + m a^2) \Delta r - m a z_0 \Delta q = \mathcal{M}_z - a J_x$$

che forniscono gli incrementi $\Delta p, \Delta q, \Delta r$ delle componenti della velocità angolare del solido dovuti agli impulsi. Dopo ciò dalla (2.8), cioè dalla

$$(2.15) \quad \Delta \mathbf{v}_G = \Delta \omega \wedge (a \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k})$$

si ha

$$(2.16) \quad \Delta v_{Gx} = z_0 \Delta q - a \Delta r \quad , \quad \Delta v_{Gy} = -z_0 \Delta p \quad , \quad \Delta v_{Gz} = a \Delta p.$$

Nel caso del cerchio semplice in cui è $G \equiv O, z_0 = 0$, si ha più semplicemente

$$(A + m a^2) \Delta p = \mathcal{M}_x + a J_z$$

$$(2.17) \quad A \Delta q = \mathcal{M}_y$$

$$(C + m a^2) \Delta r = \mathcal{M}_z - a J_x$$

$$(2.18) \quad \Delta v_{Gx} = -a \Delta r \quad , \quad \Delta v_{Gy} = 0 \quad , \quad \Delta v_{Gz} = a \Delta p.$$

Se in particolare l'impulso è diretto secondo l'asse x e passa per il baricentro si ha $J_y = J_z = 0, J_x = J$, il momento dell'impulso è nullo e si deduce quindi

$$\Delta p = 0 \quad , \quad \Delta q = 0 \quad , \quad \Delta r = \frac{-a J}{C + m a^2}$$

$$\Delta v_{Gx} = \frac{a^2 J}{C + m a^2} \quad , \quad \Delta v_{Gy} = 0 \quad , \quad \Delta v_{Gz} = 0,$$

cioè per effetto dell'impulso variano soltanto la componente della velocità angolare di rotazione intorno all'asse di simmetria del cerchio e la componente della velocità del centro secondo la tangente al cerchio nel punto di contatto con il piano di appoggio.