ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

DOMENICO OLANDA

Sistemi rigati immersi in uno spazio proiettivo

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 62 (1977), n.4, p. 489–499.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_4_489_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Geometrie finite. — *Sistemi rigati immersi in uno spazio proiettivo*^(*). Nota di DOMENICO OLANDA, presentata^(**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper, the quadrangles of Tits embedded in a Galois space are characterized: they are just the classical ones. Thus the Author's previous results (cfr. [6]) are completed. The author wishes to thank Prof. G. Tallini for helpful discussions on this subject.

I. INTRODUZIONE

Sia $S_{r,K}$ ($r \geq 3$) uno spazio proiettivo di dimensione r sopra un corpo K ed R una famiglia non vuota di rette di $S_{r,K}$. Evidentemente si ha:

$$(I.1) \quad \forall r, s \in R, \quad r \neq s \Rightarrow |r \cap s| \leq 1.$$

Posto $H = \bigcup_{r \in R} r$, supponiamo che H sia congiunto da $S_{r,K}$ e che la coppia (H, R) verifichi la seguente condizione:

$$(I.2) \quad \forall r \in R, \quad \forall P \in H - r \Rightarrow \exists! s \in R, \quad P \in s, \quad |r \cap s| = 1.$$

Allora, per le (I.1) ed (I.2), (H, R) è un quadrangolo di Tits (cfr. [5], [13], [16]) che si dirà *immerso* in $S_{r,K}$.

Due punti P e Q di H li diremo congiungibili, e scriveremo $P \sim Q$, se essi appartengono ad una retta di R , incongiungibili in caso contrario e scriveremo $P \not\sim Q$. Se P è un punto di H , denoteremo con F_P l'insieme delle rette di R passanti per P che sarà detto R -stella di centro P . Chiameremo poi blocco degenero di polo P il sottoinsieme di H dato da: $\tau_P = \bigcup_{r \in F_P} r$.

Un quadrangolo di Tits sarà detto sistema rigato (cfr. [12], [13]) se verifica le condizioni seguenti:

$$(I.3) \quad \forall P, Q \in H, \quad P \sim Q \Rightarrow \exists T \in H: T \sim P, \quad T \sim Q.$$

$$(I.4) \quad \text{Esiste un punto } P \text{ di } H \text{ tale che: } |F_P| \geq 3.$$

Esempi di sistemi rigati immersi in uno spazio di Galois sono: le forme hermitiane non singolari di $S_{3,q}$ ed $S_{4,q}$ (q quadrato) rispetto alle loro rette, i complessi lineari di rette non singolari di $S_{3,q}$, le quadriche non singolari di $S_{4,q}$ e quelle ellittiche di $S_{5,q}$ rispetto alle loro rette.

Nel presente lavoro vengono studiati i quadrangoli di Tits immersi in $S_{r,K}$ e classificati quelli che non sono sistemi rigati (cfr. n. 2). Vengono poi classificati completamente i sistemi rigati immersi in uno spazio di Galois dimostrando che essi coincidono con gli esempi su citati.

L'Autore coglie l'occasione per ringraziare il prof. G. Tallini per la guida datagli nella stesura del presente lavoro.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 16 aprile 1977.

2. GENERALITÀ SUI QUADRAGONI DI TITS IMMERSI IN UN $S_{r,K}$

Cominciamo a provare che:

I. Un quadrangolo di Tits (H, R) , immerso in $S_{r,K}$, che non sia un sistema rigato risulta necessariamente una R -stella di centro P , con $P \in H$, oppure è $r = 3$, K un campo ed (H, R) una quadrica iperbolica di $S_{r,K}$.

Dimostrazione. Due casi sono possibili a seconda che le rette di R siano a due a due incidenti oppure no. Nel primo caso evidentemente (anche in forza di (1.2)) esse passano necessariamente tutte per un punto P di H , cioè (H, R) è una R -stella di centro P . Nel secondo caso debbono esistere in R due rette sghembe e sia S_3 lo spazio che le congiunge. Scelti tre punti distinti di una di esse, siano r, s, t rispettivamente le rette di R per essi incidenti l'altra (esistenti per la (1.2)). Le rette r, s, t appartengono all' S_3 e sono a due a due sghembe. Inoltre, in forza di [5], (H, R) soddisfa la condizione:

$$(a) \quad \forall P \in H, \quad |F_P| = 2.$$

Per ogni punto P di r , per la (1.2), passa una retta $l_1 (\neq r)$ incidente s ed una retta $l_2 (\neq r)$ incidente t , ma l_1 deve coincidere con l_2 (altrimenti per P passerebbero tre rette distinte di R e ciò è escluso per la (a)); onde per P passa una sola retta l di R incidente s e t . Ne segue che H contiene il regolo $Q (\subseteq S_3)$ luogo delle rette che si appoggiano alle tre rette r, s, t . Proviamo che H coincide con Q . Invero se esistesse un punto $P \in H - Q$, poiché $P \notin r$, in forza della (1.2), per P passerebbe una retta $g (\notin Q)$ incidente r in un punto G . Si avrebbe così $|F_G| \geq 3$, contro la (a).

Siano g_1, g_2, g_3 tre rette di Q che si appoggiano alle rette r, s, t , onde $g_1, g_2, g_3 \in R$. Siano inoltre g una retta che si appoggia ad r, s, t , ed l una retta che si appoggia a g_1, g_2, g_3 , onde l, g appartengono ad R . La retta l interseca la retta g . Infatti, se l non intersecasse g , detto G il punto comune a g ed r , poiché $G \notin l$ (in quanto è $r \cap l = \emptyset$), in forza della (1.2), per G passerebbe una retta g' di R incidente l e quindi distinta da g e da r . Ma allora avremmo che $|F_G| \geq 3$ contro la (a). Si è così provato che ogni retta del regolo di direttrici r, s, t interseca ogni retta del regolo di direttrici g_1, g_2, g_3 e quindi (cfr. [10], n. 190, p. 319) K è un campo. Ne segue l'asserto.

In forza della Proposizione I, potremo supporre d'ora in poi che (H, R) sia un sistema rigato immerso in $S_{r,K}$ (ove K è un corpo). Proviamo all'uopo che:

II. Sia P un punto di H ed S_h lo spazio congiungente h rette ($h \geq 2$) indipendenti di F_P . Comunque si prenda un punto T distinto da P su una di tali rette t , per esso non passa alcuna retta di R contenuta in S_h e distinta da t . Ne segue, per la (1.2), che $H \cap S_h$ è un cono con vertice P .

Dimostrazione. Mostriamo che se l'asserto non è vero per h , esso non è vero per $h - 1$. Supponiamo quindi che esistano un punto T di $t - \{P\}$ ed

una retta t' di $R - \{t\}$ passante per T e contenuta in S_h . Consideriamo le $h - 1$ rette per P distinte da t e sia S_{h-1} il loro spazio congiungente. Lo spazio S_{h-1} risulta contenuto in S_h ed inoltre, poichè $t \notin S_{h-1}$, la retta t' non è contenuta in S_{h-1} . Essa incontra quindi S_{h-1} in un punto T' , distinto da P e che non appartiene, per la (1.2), a nessuna della $h - 1$ rette suddette per P di S_{h-1} . Detta s una di tali rette, poichè T' non appartiene ad s , per la (1.2) esiste una retta s' di R passante per T' e incidente s in un punto Q , che per la (1.2), è distinto da P . La retta s' è dunque contenuta in S_{h-1} , incide s in Q e non passa per P . Onde l'asserto non è vero per $h - 1$. Poiché a norma della (1.2), l'asserto è vero per $h = 2$, possiamo procedere per induzione su h . Supposto quindi vero l'asserto per $h - 1$, per quanto precede, esso è anche vero per h ; onde l'asserto.

III. Sia (H, R) un sistema rigato immerso in $S_{r,k}$. Per ogni punto P di H le rette di F_P sono congiunte da un iperpiano, da dirsi iperpiano tangente in P ad (H, R) . Inoltre l'iperpiano tangente S_{r-1}^P in P ad (H, R) gode della proprietà di avere in comune con H tutti e soli i punti di τ_P , onde per ogni $Q \in S_{r-1}^P \cap H$ risulta $Q \sim P$.

Dimostrazione. Siano P e Q due punti di H incongiungibili, h e k rispettivamente il massimo numero di rette di R indipendenti per P e Q , S_h ed S_k gli spazi congiungenti le h rette e le k rette. Per la Prop. II $P \notin S_k$ e $Q \notin S_h$ onde $P, Q \notin S_h \cap S_k$. Le h rette indipendenti di F_P incontrano, per la (1.2) h rette di R per Q in h punti di $S_h \cap S_k$. Tali h punti sono indipendenti e quindi le h rette che li congiungono a Q sono indipendenti, onde $h \leq k$. In modo analogo si ha $k \leq h$, quindi $h = k$. Dalla (1.3) segue allora che il massimo numero h di rette indipendenti di R per un punto P di H è fisso al variare di P in H .

Proviamo che $h = r - 1$. Sia $\mathcal{S}$ la famiglia dei sottoinsiemi di H ciascuno costituito da punti a due a due incongiungibili. Rispetto alla relazione di inclusione, l'insieme $\mathcal{S}$ è parzialmente ordinato ed inoltre, come ora proveremo, ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato ha estremo superiore, onde $\mathcal{S}$ è induttivo. Invero sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme di $\mathcal{S}$ totalmente ordinato e sia $M = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$; evidentemente $M = \sup_{X \in \mathcal{F}} X$ ed inoltre M appartiene ad $\mathcal{S}$. Infatti, se $P, Q \in M$, allora $P \in X$ e $Q \in Y$, con $X, Y \in \mathcal{F}$, ma poichè $\mathcal{F}$ è totalmente ordinato risulta $X \subseteq Y$ oppure $X \supseteq Y$ e quindi $P, Q \in X$ oppure $P, Q \in Y$ ed in entrambi i casi è $P \sim Q$.

Siano V, W due punti incongiungibili di H scelti rispettivamente su due rette r ed s di R passanti per un punto A . Sia U un punto di r distinto da A e da V e sia u una retta di R per U distinta da r . Per la (1.2) $W \notin u$ e quindi, sempre per la (1.2), da W esce una retta di R che incide u in un punto $S \neq U$. Sia T un punto di u distinto da U e da S . Si ha per la (1.2), che $T \sim V$ e $T \sim W$; inoltre lo spazio $S_{h-1} = S_h^V \cap S_h^W$ contiene, per la Proposizione II, A ed altri punti a due a due incongiungibili. Poichè $A \sim T$ allora $A \notin S_h^T$ (cfr. Prop. II) e quindi $S_h^T \not\subseteq S_{h-1}$. Il sottoinsieme $\{V, W, T\}$, essendo $\mathcal{S}$ induttivo, è per

il lemma di Zorn contenuto in un sottoinsieme $C \in \mathcal{S}$ massimale. La famiglia $\{S_h^P\}_{P \in C}$ è una famiglia di S_h a due a due distinti e, per la (1.2), si intersecano a due a due in un S_{h-1} . Ne segue che o gli S_h passano tutti per uno stesso S_{h-1}^0 oppure sono tutti contenuti in uno stesso S_{h+1}^0 . Per quanto precede non possono passare per uno stesso S_{h-1}^0 (perché S_h^V, S_h^W, S_h^T non si incontrano in uno stesso S_{h-1}) e quindi gli S_h^P sono tutti contenuti in un S_{h+1}^0 . Poiché $H \subseteq \bigcup_{P \in C} S_h^P$ ($\subseteq S_{h+1}^0$) (in quanto essendo C massimale ogni punto di H è congiungibile con qualche punto P di C , onde appartiene ad S_h^P cioè a $\bigcup_{P \in C} S_h^P$) è $h = r - 1$ (perché se fosse $h < r - 1$ risulterebbe $h + 1 < r$ e così H non sarebbe immerso in $S_{r,K}$). Si ha così l'asserto anche in forza della Proposizione II.

3. GENERALITÀ SUI SISTEMI RIGATI IMMERSI IN UNO SPAZIO DI GALOIS

D'ora in poi supporremo che (H, R) sia un sistema rigato immerso in uno spazio di Galois $S_{r,q}$. Il sistema (H, R) è pertanto finito e per esso sono note le seguenti relazioni: (cfr. [7], [8], [12])

$$(3.1) \quad \forall P \in H, \quad |F_P| = n.$$

$$(3.2) \quad |H| = (q + 1)(q(n - 1) + 1)$$

$$(3.3) \quad |R| = n(q(n - 1) + 1).$$

$$(3.4) \quad q \leq (n - 1)^2$$

$$(3.5) \quad n - 1 \leq q^2 \Leftrightarrow n \leq q^2 + 1.$$

Un qualsiasi sistema rigato è detto di tipo (s, t) se ogni sua retta ha $s + 1$ punti ed ogni R -stella ha $t + 1$ rette. Sussiste la seguente proprietà, una cui dimostrazione può trovarsi in [7]:

IV. Se (H, R) è un sistema rigato di tipo (s, t) ed (H', R') è un sottosistema di tipo (s', t') risulta:

$$(3.6) \quad s = s' \quad \text{oppure} \quad s \geq s' t'$$

$$(3.7) \quad t = t' \quad \text{oppure} \quad t \geq s' t'.$$

Dimostriamo le seguenti proposizioni:

V. Ogni sistema rigato immerso in $S_{r,q}$, con $r \geq 4$, non contiene iperpiani.

Dimostrazione. Sia per assurdo S_{r-1} un iperpiano contenuto in H . Poiché H è congiunto da $S_{r,q}$, l'iperpiano S_{r-1} è propriamente contenuto in H , onde esiste almeno un punto P di H non appartenente ad S_{r-1} . Sia S_{r-1}^P l'iperpiano tangente ad H nel punto P e sia S_{r-2} lo spazio intersezione $S_{r-1} \cap S_{r-1}^P$. Lo spazio S_{r-2} è contenuto in H e non passa per P , inoltre poiché è contenuto in S_{r-1}^P si ha che (per la Prop. II) per ogni punto Q di S_{r-2} risulta $Q \sim P$ onde è:

$$(3.8) \quad |F_P| = n = q^{r-2} + q^{r-3} + \dots + q + 1.$$

Poiché per ipotesi è $r \geq 4$, per la (3.2) è $|H| > |S_r|$ il che è assurdo. L'asserto è così dimostrato.

VI. *Se il sistema rigato (H, R) contiene un iperpiano S_{r-1} allora è $r = 3$ ed (H, R) è il sistema rigato associato ad un complesso lineare di rette di $S_{3,q}$.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente è $r = 3$. (H, R) risulta quindi immerso in $S_{3,q}$ e pertanto esso è evidentemente di prima specie (cfr. [12], n. 5, Def. X) ed inoltre, poiché H contiene per ipotesi almeno un piano, si ha $n = q + 1$. Si ha così $H = S_{3,q}$ ed R è un complesso lineare di rette associato ad una opportuna polarità nulla (cfr. [12], n. 7, Prop. XXII). L'asserto è così provato.

VII. *Sia (H, R) un sistema rigato immerso in $S_{r,q}$ e sia S_{r-1} un qualsiasi iperpiano non contenuto in H . Se S_{r-1} non contiene rette del sistema (H, R) , allora l'intersezione di S_{r-1} con H è costituita da $q(n-1) + 1$ punti a due a due incongiungibili.*

Dimostrazione. Sia P un punto di H non appartenente ad S_{r-1} ; il blocco τ_P interseca S_{r-1} in n punti, onde è $S_{r-1} \cap H \neq \emptyset$. Denotiamo con $H' = S_{r-1} \cap H$ e sia A un punto di H' . Detta t una retta di F_A , per ogni punto Q di $t - \{A\}$; le $n-1$ rette di $F_Q - \{t\}$ incontrano S_{r-1} in $n-1$ punti facenti parte di H' ; viceversa ogni punto di $H' - \{A\}$, risultando incongiungibile con A , si trova su una retta r di F_Q , con $Q \in t - \{A\}$: Si ha quindi:

$$(3.9) \quad |H'| = q(n-1) + 1,$$

ed inoltre poiché S_{r-1} non contiene rette di R tali punti sono a due a due incongiungibili, onde l'asserto.

Per approfondire ulteriormente lo studio delle sezioni iperplane rileviamo che, come subito si prova, si ha:

VIII. *Sia S_{r-1} un iperpiano di S_r contenente qualche retta del sistema (H, R) . Allora, posto $H' = S_{r-1} \cap H$ ed $R' = \{r \in R, r \subseteq S_{r-1}\}$, risulta $H' = \bigcup_{r \in R'} r$ e la coppia (H', R') è un quadrangolo di Tits e pertanto se non è un sistema rigato essa risulta (cfr. Prop. I) una R' -stella di centro P , con $P \in H'$, oppure è una quadrica rigata di $S_{3,q}$.*

Sia (H, R) un sistema rigato immerso in $S_{r,q}$ di seconda specie (cfr. [12], n. 5, Def. XIII). Dimostriamo che:

IX. *Ogni retta di S_r che non appartenga ad H o è esterna o è tangente (cioè è unisecante) o ha due punti distinti in comune con H , onde se una retta ha in comune con H tre punti essa appartiene ad H . Ne segue che ogni piano non contenuto in H contiene al più due rette di H .*

Dimostrazione. Siano P e Q due punti incongiungibili di H e sia t la retta per essi. Proviamo che $|t \cap H| = 2$. Consideriamo gli iperpiani tangenti

S_{r-1}^P e S_{r-1}^Q ; essi, essendo distinti (perché è $P \sim Q$) si intersecano in un S_{r-2} , sghembo con t , e contenente la linea $l = \tau_P \cap \tau_Q$. Se esistesse un punto $T \in t \cap H$ e distinto da P e Q , per ogni $A \in l$ sul piano α_A , che congiunge t con A , resterebbe determinata, oltre alle rette PA, QA di R , anche la retta TA che, per la (1.2), dovrebbe necessariamente appartenere ad R . Si avrebbe così che τ_T passerebbe per l , onde (H, R) non sarebbe di seconda specie, contro l'ipotesi. Si ha così l'asserto.

X. Sia (H, R) un sistema rigato di seconda specie immerso in $S_{r,q}$ l'intero $n = |F_P|(P \in H)$ soddisfa la disuguaglianza:

$$(3.10) \quad n \leq q^{r-3} + 1.$$

Ne segue (cfr. (1.4)) che in un $S_{3,q}$ non esistono sistemi rigati di seconda specie.

Dimostrazione. Sia P un punto di H ed S_{r-1}^P l'iperpiano tangente ad H in P . L'iperpiano S_{r-1}^P ha con H in comune qn punti distinti da P , le q^{r-1} rette per P non contenute in S_{r-1}^P sono, per la Proposizione IX, al più tutte 2-secanti H e cioè hanno al più un punto in comune con H e distinto da P , onde è (cfr. (3.2)):

$$(3.11) \quad |H| = (q+1)(q(n-1)+1) \leq q^{r-1} + qn + 1,$$

da cui segue la (3.10). Si ha così l'asserto.

4. SISTEMI RIGATI IMMERSI IN $S_{3,q}$

Sia (H, R) un sistema rigato immerso in $S_{3,q}$ e sia r una qualsiasi retta di R . Al variare del punto P sulla retta r il piano tangente in P ad H (cfr. Prop. III), varia descrivendo tutto il fascio di piani di asse r . Resta così provato che:

XI. Ogni piano di $S_{3,q}$ contenente una retta r di R risulta piano tangente ad H in un punto P di r .

I piani di $S_{3,q}$ che non contengono rette di R e che incontrano quindi H in $q(n-1)+1$ punti a due a due incongiungibili (cfr. Prop. VII) saranno da noi detti piani *secanti*.

Siano P e Q due punti incongiungibili di H . I rispettivi piani tangenti α_P ed α_Q sono tali che $Q \notin \alpha_P$ e $P \notin \alpha_Q$ e conseguentemente si incontrano in una retta p , che è sghemba con la retta t congiungente i punti P e Q . La retta p contiene n punti di H , dati da $\tau_P \cap \tau_Q$ e che costituiscono la linea $\tau_P \cap \tau_Q$. Poiché quindi le linee, nel nostro caso, sono costituite da n punti di una retta, il sistema rigato (H, R) è di prima specie e conseguentemente risulta (cfr. [12], n. 6, Prop. XVIII):

$$(4.1) \quad n \leq q + 1.$$

XII. Il sistema (H, R) contiene almeno un piano di $S_{3,q}$ se, e soltanto se, risulta $n = q + 1$.

Dimostrazione. Se $n = q + 1$ evidentemente ogni piano tangente è contenuto in H . Viceversa, se α è un piano contenuto in H , α è tangente, onde è $n = q + 1$. Invero se α fosse secante, dovrebbe essere:

$$(4.2) \quad q(n - 1) + 1 = q^2 + q + 1,$$

cioè $n = q + 2$ contro la (4.1). L'asserto è così provato.

Resta altresì dimostrato che:

XIII. Condizione necessaria e sufficiente perchè (H, R) risulti un sistema rigato associato ad un complesso lineare di rette (cfr. [12], n. 7, Prop. XXII), è che H contenga almeno un piano di $S_{3,q}$.

Nel seguito supporremo che non esistano piani di $S_{3,q}$ contenuti in H e quindi che sia $n < q + 1$. Dimostriamo ora che:

XIV. Se P è un punto di H le rette passanti per P e che hanno in comune con H soltanto il punto P , sono tutte e sole le rette del piano tangente α_P , che passano per P e non appartengono ad R .

Dimostrazione. Sia t una qualunque retta per P e non appartenente al piano tangente α_P . Se r è una retta di R per P , il piano β delle rette r e t risulta distinto da α_P ed è piano tangente ad H in un punto Q di $r - \{P\}$. Le rette di τ_Q incontrano t in n punti, onde t ha n punti in comune con H . Si ha così l'asserto.

Osserviamo che nell'ultima dimostrazione è stato altresì provato che:

XV. Ogni retta di $S_{3,q}$, avente con H in comune due punti e non appartenente ad R , ha in comune con H esattamente n punti.

In relazione ad H , le rette di $S_{3,q}$ che non appartengono ad H , si suddividono pertanto a priori in rette esterne, rette tangenti e rette n -secanti, a seconda che non abbiano punti in comune con H , un sol punto o n punti in comune con H .

Sia P un punto di $S_{3,q}$ non appartenente ad H . Nell'insieme R definiamo la seguente relazione σ :

$$\forall r, s \in R, \quad r\sigma s \iff \text{esiste un piano per } P \text{ che contiene } r \text{ e } s.$$

La relazione σ è di equivalenza e pertanto l'insieme R delle rette viene suddiviso in classi disgiunte. Ogni classe di equivalenza è, evidentemente, costituita da n rette formanti fascio e giacenti in un piano passante per P . Denotato con T_P l'insieme quoziente di R/σ per quanto detto per la (3.3), risulta:

$$(4.3) \quad |T_P| = \frac{|R|}{n} = q(n - 1) + 1.$$

Denoteremo con X_Q un elemento di T_P , dove l'indice Q rappresenta il centro del fascio di rette di cui la classe X_Q è costituita. Sia $\mathcal{C}_P$ l'insieme delle rette per P tangenti ad H , per la Prop. XIV l'applicazione:

$$(4.4) \quad f: X_Q \in T_P \rightarrow PQ \in \mathcal{C}_P$$

è biettiva, onde $|\mathcal{C}_P| = |T_P|$. Dalla (4.3) segue allora che:

XVI. *Il numero delle rette tangenti, passanti per un qualsiasi punto P , non appartenente ad H , è $q(n-1) + 1$.*

Se denotiamo con t_0 il numero delle rette esterne uscenti da un punto $P \notin H$, con t_1 il numero di quelle tangenti e con t_n quello delle n -secanti, risulta che gli interi t_0, t_1, t_n verificano le seguenti relazioni (cfr. XVI e (3.2)):

$$(4.5) \quad \begin{aligned} t_0 + t_1 + t_n &= q^2 + q + 1 \\ t_1 &= q(n-1) + 1 \\ t_1 + nt_n &= (q+1)(q(n-1) + 1). \end{aligned}$$

Il sistema (4.5) ammette le seguenti soluzioni:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} t_0 &= q(q - (n-1)^2) \\ t_1 &= q(n-1) + 1 \\ t_n &= q(q(n-1) + 1), \end{aligned}$$

onde, essendo $t_0 \geq 0$, è $q \geq (n-1)^2$. Dalla (3.4) segue allora che $q = (n-1)^2$ quindi, essendo $t_0 = 0$, ogni retta di $S_{3,q}$ o è una 1-secante, o una n -secante H , ovvero appartiene ad H . In forza allora di una ben nota caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di un $S_{3,q}$, (cfr. [14]), possiamo affermare, tenendo conto che per ogni punto P di H passa almeno una n -secante, che:

XVII. *Se (H, R) è un sistema rigato immerso in $S_{3,q}$, con $q \geq 4$, allora H è una forma hermitiana non singolare ed R è la famiglia delle sue rette.*

5. SISTEMI RIGATI IMMERSI IN $S_{4,q}$ CON $q \geq 4$

Consideriamo due rette sghembe r e t di R e sia S_3 il loro spazio congiungente. Posto $H' = H \cap S_3$ ed $R' = \{r \in R, r \subseteq S_3\}$, si ha, in forza di quanto già esposto, che, a priori, le possibilità per (H', R') sono le seguenti:

- (a) (H', R') è un cono con vertice un punto di H ;
- (b) (H', R') è un complesso lineare di rette;
- (c) (H', R') è una quadrica rigata di S_3 ;
- (d) (H', R') è una forma hermitiana di S_3 .

Poiché (H', R') contiene le rette sghembe r e t , per (H', R') è esclusa l'eventualità indicata in (a). L'eventualità (b) implicherebbe $H' = S_3 \subseteq H$, cosa esclusa dalla prop. V. Restano così da esaminare le due eventualità indicate in (c) e in (d).

Supponiamo che (H', R') sia una quadrica rigata. In tal caso, detto T un punto di H non appartenente ad S_3 , (esistente perchè H è immerso in $S_{4,q}$) sia t una retta di R per T e sia Q il punto comune ad S_3 e t . Sia τ_Q il piano tangente ad H' in Q , tale piano ha in comune con H' $2q + 1$ punti. Per ogni punto $P \in t - \{Q\}$ il blocco $\tau_P - \{t\}$ incontra S_3 in $n - 1$ punti di H' , non appartenenti a τ_Q ; inoltre se $P, P' \in t - \{Q\}$ e $P \neq P'$ allora, per la (1.2), è:

$$(5.1) \quad (\tau_P - \{t\} \cap S_3) \cap (\tau_{P'} - \{t\} \cap S_3) = \emptyset.$$

Viceversa ogni punto di H' che non appartenga a τ_Q risulta incongiungibile con Q , onde, per la (1.2), appartiene ad una retta di τ_P con $P \in t - \{Q\}$. Si ha quindi:

$$(5.2) \quad |H'| = q^2 + 2q + 1 = q(n - 1) + 2q + 1,$$

da cui segue:

$$(5.3) \quad n = q + 1.$$

Nel caso (d) con ragionamento analogo si ha che:

$$(5.4) \quad |H'| = (q + 1)(q\sqrt{q} + 1) = q(\sqrt{q} + 1) + q(n - 1) + 1,$$

da cui segue:

$$(5.5) \quad n = q\sqrt{q} + 1.$$

Dalle considerazioni fatte segue che se (H', R') è una quadrica ogni altra sezione iperpiana contenente qualche coppia di rette sghembe di R è ancora una quadrica rigata e pertanto, evidentemente, ogni retta di $S_{4,q}$ o è esterna ad H , o è tangente ad H o ha due punti in comune con H o appartiene ad H . Inoltre dalla (5.3) e dalla (3.2) segue che:

$$(5.6) \quad |H| = q^3 + q^2 + q + 1,$$

e così (cfr. [11]) H è una quadrica di $S_{4,q}$ ed R è la famiglia delle sue rette.

Se (H', R') è una forma hermitiana, ogni altra sezione iperpiana che contenga qualche coppia di rette sghembe di R è ancora una forma hermitiana. Ne segue che, q è un quadrato e che ogni retta di $S_{4,q}$ o è tangente ad H o appartiene ad H o ha esattamente $m = \sqrt{q} + 1$ punti in comune con H . Dalla (5.5) e dalla (3.2) segue che:

$$(5.7) \quad |H| = (q + 1)(q^2\sqrt{q} + 1),$$

e quindi (cfr. [14]) H è una forma hermitiana non singolare di $S_{4,q}$ ed R è la famiglia delle sue rette.

Abbiamo così provato che:

XVIII. Se (H, R) è un sistema rigato immerso in $S_{4,q}$ ($q \geq 4$), allora, o risulta $n = q + 1$ ed (H, R) è una quadrica di $S_{4,q}$ o risulta, q un quadrato, $n = q \sqrt{q} + 1$ ed (H, R) è una forma hermitiana non singolare di $S_{4,q}$.

6. SISTEMI RIGATI IMMERSI IN $S_{5,q}$

Sia (H, R) un sistema rigato immerso in $S_{5,q}$ e siano r e t due rette sghembe di R . Consideriamo lo spazio S_3 che le congiunge e sia T un punto di H non appartenente ad S_3 . Sia S_4 lo spazio congiungente S_3 e T ; posto $H' = S_4 \cap H$ ed $R' = \{r \in R, r \subseteq S_4\}$ per la coppia (H', R') , sono a priori possibili, (tenuto conto che H' contiene r, t, T e delle Prop. VIII e XVIII) le seguenti eventualità:

- (a) (H', R') è una quadrica di S_4 ;
- (b) (H', R') è una forma hermitiana di S_4 .

Supponiamo per assurdo che sia vera la (b). In tal caso (H', R') è un sottosistema di (H, R) di tipo $(q, q \sqrt{q})$ e così (essendo evidentemente $n - 1 \neq q \sqrt{q}$) risulta, per la seconda delle (3.7) $n - 1 \geq q^2 \sqrt{q} + 1 > q^2 + 1$ contro la (3.5). Pertanto (H', R') è una quadrica di S_4 ed (H', R') costituisce un sottosistema di (H, R) di tipo (q, q) . Ne segue, essendo evidentemente $n - 1 \neq q$, per la seconda delle (3.7):

$$(6.1) \quad n - 1 \geq q^2 \Leftrightarrow n \geq q^2 + 1$$

e quindi in forza della (3.5):

$$(6.2) \quad n = q^2 + 1.$$

Ogni altra sezione iperpiana che contenga almeno due rette sghembe di R è una quadrica e quindi facilmente si ha che ogni retta di $S_{5,q}$ o è esterna ad H o è tangente ad H o ha due punti in comune con H o appartiene ad H . Inoltre dalla (6.2) e dalla (3.2) si ha:

$$(6.3) \quad |H| = q^4 + q^3 + q + 1,$$

e quindi (cfr. [11]) H è una quadrica ellittica di $S_{5,q}$ ed R è la famiglia delle sue rette. Abbiamo così provato che:

XIX. Se (H, R) è un sistema rigato immerso in $S_{5,q}$ risulta $n = q^2 + 1$, H è una quadrica ellittica di $S_{5,q}$ ed R è la famiglia delle sue rette.

Sia (H, R) un sistema rigato immerso in $S_{r,q}$, con $r \geq 6$. Siano t ed s due rette sghembe di R e sia S_3 lo spazio che le congiunge. Detto T un punto non appartenente ad S_3 (esistente perché $H \not\subseteq S_3$), sia S_4 lo spazio che congiunge S_3 e T . Detto Q un punto di H e non appartenente ad S_4 (esistente

perchè $H \not\subseteq S_4$) sia S_5 lo spazio congiungente S_4 e Q . Posto $H' = S_5 \cap H$ ed $R' = \{r \in R, r \subseteq S_5\}$ la coppia (H', R') è un quadrangolo di Tits immerso in $S_{5,q}$. Esso non è una quadrica di S_3 (essendo congiunto da $S_{5,q}$) nè una R -stella (perchè contiene le rette t ed s che sono sghembe). Dunque, per la Prop. I, (H', R') è un sistema rigato immerso in $S_{5,q}$ che risulta, per la Prop. XIX, una quadrica ellittica di $S_{5,q}$. Quindi (H', R') è un sottosistema rigato di (H, R) di tipo (q, q^2) e così per la seconda delle (3.7) risulta $n - 1 \geq q^3$ contro la (3.5). Resta così dimostrato che:

XX. *Non esistono sistemi rigati immersi in $S_{r,q}$ con $r \geq 6$.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. T. BENSON (1970) - *On the structure of generalized quadrangles*, « J. Alg. », 15, 443-454.
- [2] R. C. BOSE (1963) - *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, « Pacific J. Math. », 13.
- [3] P. DEMBOWSKI (1968) - *Finite geometries*. Ergebnisse der Math., Springer, Berlin.
- [4] D. G. HIGMAN (1971) - *Partial geometries, generalized quadrangles and strongly regular graphs*. Atti del Convegno di Geometria Combinatoria e sue applicazioni, Perugia.
- [5] D. OLANDA (1972) - *Quadrangoli di Tits e sistemi rigati*, « Rend. Acc. Scienze fis. Mat., Napoli », 39 (4), 81-87.
- [6] D. OLANDA (1973) - *Sistemi rigati immersi in uno spazio proiettivo*. Relazione n. 26, Ist. Mat. Univ. Napoli, 1-21.
- [7] S. E. PAYNE (1973) - *Finite generalized quadrangles*. Proc. Conf. on Projectives planes, Washington State University Press, Pullman.
- [8] S. E. PAYNE (1974) - *Generalized quadrangles of even order*. « J. Alg. », 31, 367-391.
- [9] B. SEGRE (1961) - *Lectures on modern geometry*. Ed. Cremonese, Roma.
- [10] B. SEGRE (1965) - *Forme e geometrie hermitiane, con particolare riguardo al caso finito* « Ann. di Mat. » 70 (4), 1-202.
- [11] G. TALLINI (1956) - *Sulle k -calotte degli spazi lineari finiti*. Note I e II, Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), 20, 311-317, 442-466.
- [12] G. TALLINI (1971) - *Strutture d'incidenza dotate di polarità*, « Rend. Sem. mat. e fis. di Milano », 41, 1-41.
- [13] G. TALLINI (1972) - *Sistemi grafici rigati*. Rel. n. 8, Ist. Mat. Univ. Napoli.
- [14] M. TALLINI SCAFATI (1967) - *Caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di un $S_{1,q}$* , « Rend. di Mat., Roma », 26, 273-303.
- [15] J. A. THAS (1972) - *On 4-gonal configurations*. C.I.M.E. Session Bressanone.
- [16] J. TITS (1959) - *Sur la trivalité et certains groupes qui s'en deduisent*, « Publ. Math. I.H.E.S., Paris » 2, 14-60.