
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ALESSANDRO BICHARA

Sui k -insiemi di $S_{3,q}$ di tipo $((n-1)q+1, nq+1)_2$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.4, p. 480–488.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_4_480_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometrie finite. — *Sui k -insiemi di $S_{3,q}$ di tipo $((n-1)q+1, nq+1)_2$ (*)*. Nota di ALESSANDRO BICHARA, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — This paper deals with k -sets in $S_{3,q}$ such that every plane meets them at either $(n-1)q+1$ or $nq+1$ points ($2 \leq n \leq q$). Thus, with suitable graphic conditions, we obtain a new characterization of the hyperbolic quadrics and of the hermitian varieties in $S_{3,q}$.

1. INTRODUZIONE

Sia $S_{r,q}$ ($r \geq 3, q = p^h, p$ primo) uno spazio di Galois di dimensione r ed ordine q . In [5] (cfr. anche [6]) sono introdotti i concetti di *caratteri, classe, tipo, specie e grado di un k -insieme di $S_{r,q}$* .

Diremo che un k -insieme K di $S_{3,q}$ è un k_n se esso è di tipo $((n-1)q+1, nq+1)_2$, con $1 \leq n \leq q+1$. Una forma hermitiana di $S_{3,q}$, con q quadrato, è un k_n con $n = \sqrt{q} + 1$ e $k = \sqrt{q}q^2 + (\sqrt{q} + 1)q + 1$. Le quadriche non singolari di $S_{3,q}$ sono dei k_n con $n = 1, k = q^2 + 1$ (quadriche ellittiche) ed $n = 2, k = (q+1)^2$ (quadriche iperboliche). I k_n sono dunque una generalizzazione di questi esempi classici.

Per quanto provato in [10], Prop. V, se in $S_{r,q}$ esiste un k_n è necessariamente $r = 3$ (altrimenti risulterebbe $(n-1)q+1 = [1 + (q+1)(q \pm \sqrt{q}) - q]/2$ e ciò è manifestamente assurdo). I k_1 di $S_{3,q}$ sono stati completamente caratterizzati in [11], ove, tra l'altro, è provato che ogni k_1 di $S_{3,q}$ è necessariamente una retta oppure è una (q^2+1) -calotta (onde, se q è dispari, è una quadrica ellittica). Infine, in $S_{3,q}$ non esiste alcun k_{q+1} perché il complementare di un siffatto insieme, supposto esistente, sarebbe di tipo $(0, q)_2$ e ciò è assurdo per la Prop. XIV di [6]. Possiamo dunque supporre $2 \leq n \leq q$.

In questo lavoro ci occuperemo appunto dei k_n di $S_{3,q}$ con:

$$(1.1) \quad 2 \leq n \leq q.$$

Nel n. 2 studieremo alcune proprietà di tali insiemi e, fornendo una classe molto ampia di esempi diversi da quelli classici, proveremo che per ogni n verificante la (1.1) ogni $S_{3,q}$ contiene qualche k_n .

Nel n. 3 esamineremo le sezioni piane dei k_n per passare poi, nel n. 4, a studiare il caso $n = 2$; in proposito proveremo che:

I. Ogni k_2 di $S_{3,q}$ è ad almeno quattro caratteri diversi da zero nella dimensione uno; ogni k_2 di $S_{3,q}$ di tipo $(a, b, c, d)_1$ con $d > q/2 + 7/4$ è una quadrica iperbolica.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche del C.N.R.

(**) Nella seduta del 16 aprile 1977.

Nel n. 5, esamineremo il caso $n \geq 3$. Studieremo poi i $k_n (n \geq 3)$ verificanti la condizione:

H) *Esiste un piano π dello spazio secante il k_n in un insieme a due caratteri rispetto alle rette di π ,*

provando infine la seguente proposizione che dà, tra l'altro, una nuova caratterizzazione delle forme hermitiane:

II. *Ogni $k_n (n \geq 3)$ di $S_{3,q}$ è ad almeno tre caratteri diversi da zero nella dimensione uno; ogni $k_n (n \geq 3)$ di $S_{3,q}$, a tre caratteri nella dimensione uno e verificante la condizione H è una forma hermitiana non singolare (onde q è un quadrato ed $n = \sqrt{q} + 1$).*

2. PRIME PROPRIETÀ DEI k_n DI $S_{3,q}$

Cominciamo a provare che:

III. *Se K è un k_n di $S_{3,q}$ risulta necessariamente:*

$$(2.1) \quad k = (n-1)q^2 + nq + 1,$$

oppure q è dispari ed è:

$$(2.2) \quad n = \frac{q+3}{2}, \quad k = \frac{q^3+q}{2} + q^2 + 1.$$

Dimostrazione. Dette x ed y le cardinalità degli insiemi di piani $S_{3,q}$ secanti K in $(n-1)q+1$ ed $nq+1$ punti rispettivamente, per la Prop. II di [6], risulta:

$$(2.3) \quad \begin{cases} x + y = q^3 + q^2 + q + 1, \\ [(n-1)q+1]x + (nq+1)y = k(q^2+q+1), \\ (n-1)q[(n-1)q+1]x + nq(nq+1)y = k(k-1)(q+1). \end{cases}$$

Se $n \neq (q+3)/2$, il sistema ammette la sola soluzione intera:

$$(2.4) \quad k = y = (n-1)q^2 + nq + 1, \quad x = q^3 - (n-2)q^2 - (n-1)q.$$

Se q è dispari e $n = (q+3)/2$, il sistema ammette due soluzioni intere, la prima delle quali è la (2.4) e la seconda è:

$$(2.5) \quad n = \frac{q+3}{2}, \quad k = x = \frac{q^3+q}{2} + q^2 + 1, \quad y = \frac{q^3+q}{2}.$$

Dalle (2.4) e (2.5) si ha l'asserto.

Se r è una retta di $S_{3,q}$ diremo che r è l -secante K se lo sega in esattamente l punti. Se π è un piano secante K in $nq+1$ punti ($m = n-1, n$) diremo che esso è $(mq+1)$ -secante K . Proveremo ora che:

IV. *Sia K un k_n di $S_{3,q}$ verificante la (2.1). Se r è una retta dello spazio, secante K in l punti, per la quale passano esattamente l' piani*

$(nq + 1)$ -secanti K , risulta:

$$(2.6) \quad l' = l.$$

Dimostrazione. Il numero C delle coppie del tipo (P, π) , ove $P \in K - r$ e π è un piano per P ed r , può calcolarsi nei due modi seguenti: Per ogni $P \in K - r$ passa uno ed un sol piano che lo congiunge ad r , onde $C = |K - r| = k - l$. D'altra parte ognuno degli l' piani $(nq + 1)$ -secanti K per r possiede esattamente $nq + 1 - l$ punti di $K - r$ e ciascuno dei restanti $q + 1 - l'$ piani per r possiede $(n - 1)q + 1 - l$ punti di K non su r , onde è $C = l'(nq + 1 - l) + (q + 1 - l')[(n - 1)q + 1 - l]$. Dalla (2.1) segue allora l'asserto.

Mediante considerazioni analoghe si prova che:

V. Sia K un k_n di $S_{3,q}$ verificante la (2.2). Se r è una retta dello spazio, secante K in l punti, per la quale passano esattamente l' piani $(nq + 1)$ -secanti K , risulta:

$$(2.7) \quad l' = l - 1.$$

Dalle Prop. IV e V si ha subito che:

VI. Sia K un k_n di $S_{3,q}$ ed r una retta dello spazio. Se K verifica la (2.1) per r passa almeno un piano $(nq + 1)$ -secante K se, e solo se, essa sega K in almeno un punto e per r passa almeno un piano $[(n - 1)q + 1]$ -secante K se, e solo se, essa contiene un punto non di K . Se K verifica la (2.2) ad r appartiene almeno un punto di K e per essa passa almeno un piano $[(n - 1)q + 1]$ -secante K ; per r passa un piano $(nq + 1)$ -secante K se, e solo se, essa sega K in almeno due punti.

Di fatto, in ogni $S_{3,q}$, quale che sia n (con $2 \leq n \leq q$), esistono dei k_n . Un esempio è dato dall'insieme K costituito da tutti e soli i punti appartenenti ad $(n - 1)q + 1$ rette dello spazio, due a due sghembe. Ogni piano per una di tali rette sega K in $nq + 1$ punti ed ogni altro piano dello spazio è $[(n - 1)q + 1]$ -secante K .

Un altro esempio si ottiene nel modo seguente. Si fissi una retta r di $S_{3,q}$ ed una biezione f tra l'insieme dei suoi punti e l'insieme dei piani per essa. Se $P \in r$ sia $\{s_i^P\}_{i=1, \dots, n-1}$ una arbitrariamente scelta famiglia costituita da $n - 1$ rette, due a due distinte tra loro e da r , passanti per P e contenute in $f(P)$ e sia $\mathcal{R}$ l'insieme di tali rette. Posto $K = \bigcup_{P \in r} \left(\bigcup_{i=1}^n s_i^P \right)$ si verifica facilmente che ogni piano per r o per una delle rette di $\mathcal{R}$ sega K in $nq + 1$ punti e che ogni piano non contenente nessuna di tali rette sega K in $(n - 1)q + 1$ punti. Dunque K è un k_n .

3. LE SEZIONI PIANE DI UN k_n DI $S_{3,q}$

In questo numero studieremo le sezioni piane di un k_n di $S_{3,q}$. Un piano dello spazio sega il k_n in un insieme K' costituito da $mq + 1$ punti

$(m = n - 1, n)$; ricordiamo che (cfr. [5] e [6]) K' si dice di classe $[\alpha, \beta, \gamma]_1$ rispetto alle rette di π ($\alpha < \beta < \gamma$) se ogni retta di tal piano sega K' in α o in β o in γ punti. Cominciamo a provare che:

VII. Sia K un k_n di $S_{3,q}$ e sia π un piano $(mq + 1)$ -secante K ($m = n - 1, n$). Se l'insieme $K' = K \cap \pi$ è di classe $[\alpha, \beta, \gamma]_1$ rispetto alle rette di π , su tal piano giacciono esattamente x_m, y_m, z_m rette secanti K' (e dunque K) in α, β e γ punti rispettivamente, ove:

$$(3.1) \quad x_m = \frac{[mq - (\gamma + \beta - 1)(q + 1)] \cdot (mq + 1) + \gamma\beta(q^2 + q + 1)}{(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha)}.$$

$$(3.2) \quad y_m = \frac{[(\alpha + \gamma - 1)(q + 1) - mq](mq + 1) - \alpha\gamma(q^2 + q + 1)}{(\gamma - \beta)(\beta - \alpha)}.$$

$$(3.3) \quad z_m = \frac{[mq - (\alpha + \beta - 1)(q + 1)](mq + 1) + \alpha\beta(q^2 + q + 1)}{(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha)}.$$

Dimostrazione. Per la Prop. II di [6] risulta:

$$(3.4) \quad \begin{cases} x_m + y_m + z_m = q^2 + q + 1, \\ \alpha x_m + \beta y_m + \gamma z_m = (mq + 1)(q + 1), \\ \alpha(\alpha - 1)x_m + \beta(\beta - 1)y_m + \gamma(\gamma - 1)z_m = mq(mq + 1). \end{cases}$$

Poiché $\alpha < \beta < \gamma$ il sistema (3.4) ha determinante dei coefficienti diverso da zero e quindi ammette una e una sola soluzione data dalle (3.1), (3.2) e (3.3), onde l'asserto.

Se è $x_m = 0$ e $y_m z_m \neq 0$, K' risulta di tipo $(\beta, \gamma)_1$ rispetto alle rette di π . Proveremo ora che:

VIII. Nelle ipotesi della Prop. VII, se K' è di tipo $(\beta, \gamma)_1$ con $\beta \geq 2$, risulta:

$$(3.5) \quad \gamma = q + 1.$$

Dimostrazione. Deve essere $x_m = 0$, onde per la (3.1), risulta $(\beta - 1) \cdot (\gamma - 1) \equiv 0 \pmod{q}$, onde (poiché è $q = p^h$, con p primo, ed è $2 \leq \beta < \gamma \leq q + 1$) segue la (3.5) oppure è:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \beta - 1 = \lambda p^\varepsilon, & 1 \leq \varepsilon \leq h - 1, \lambda > 0, (\lambda, p) = 1, \\ \gamma - 1 = \mu p^{\varepsilon'}, & 1 \leq \varepsilon' \leq h - 1, \mu > 0, (\mu, p) = 1, \\ \varepsilon + \varepsilon' \geq h. \end{cases}$$

Sia allora ε'' il non maggiore tra ε ed ε' . Dalla (3.1) e poiché $x_m = 0$ si deduce $(\beta - 1)(\gamma - 1) \equiv 0 \pmod{p^{h+\varepsilon''}}$, onde, per le (3.6) e (3.1), risulta:

$$(3.7) \quad \lambda\mu \equiv 0 \pmod{p^{h+\varepsilon''-\varepsilon-\varepsilon'}}, \quad h + \varepsilon'' - \varepsilon - \varepsilon' > 0.$$

Poiché λ e μ sono entrambi positivi e primi con p la (3.7) non è mai verificata e quindi la (3.6) è esclusa, onde l'asserto.

IX. *Nelle ipotesi della Prop. VII, se K' è di tipo $(\beta, q+1)_1$, risulta necessariamente $m = 1$.*

Dimostrazione. È ovviamente $\beta > 0$. Sia P un punto di π non in K' certo esistente perché $mq + 1 \leq nq + 1 < q^2 + q + 1$ per la (1.1). Le rette di π per P sono tutte β -secanti K' (perché contengono $P \in \pi - K'$); rette distinte per P contengono punti distinti di K' e quindi le $q+1$ rette per P su π ripartiscono K' in $q+1$ insiemi, due a due disgiunti e contenenti ciascuno β punti, onde è $\beta(q+1) = mq + 1$; se ne deduce $\beta - 1 \equiv 0 \pmod{q}$ ed essendo $0 < \beta < q+1$ risulta $\beta = 1$ e quindi $\beta(q+1) = q+1 = mq + 1$, onde l'asserto.

X. *Sia K un k_n di $S_{3,q}$ e sia π un piano dello spazio secante K in un $(mq+1)$ -insieme K' di tipo $(\beta, \gamma)_1$ rispetto alle rette di π . Se è $\beta \geq 1$ ed $m \geq 2$, K' risulta necessariamente un arco hermitiano cioè un $(q\sqrt{q}+1)$ -insieme di tipo $(1, \sqrt{q}+1)_1$ di π , onde q è un quadrato ed è:*

$$(3.8) \quad \beta = 1, \quad \gamma = \sqrt{q} + 1, \quad m = \sqrt{q}.$$

Dimostrazione. Poiché è $\beta \geq 1$, K' è di classe $[0, \beta, \gamma]_1$ rispetto alle rette di π , onde, per la Prop. IX e poiché è $m \geq 2$, risulta $\gamma \leq q$; per la Prop. VIII è allora $\beta = 1$. Dalla Prop. VIII di [7] segue che K' o è un arco hermitiano ovvero è un subpiano $\pi_{\sqrt{q}}$ di π . Ma tale seconda eventualità è esclusa perché $|\pi_{\sqrt{q}}| = q + \sqrt{q} + 1$, onde sarebbe $K' = mq + 1 = q + \sqrt{q} + 1$ e ciò è assurdo. Ne segue l'asserto.

4. IL CASO $n = 2$

In questo numero studieremo i k_2 di $S_{3,q}$ ovvero i k -insiemi di tipo $(q+1, 2q+1)_2$ di $S_{3,q}$. Proviamo all'uopo che:

XI. *Se K è un k_2 di $S_{3,q}$ esso verifica necessariamente la (2.1), onde è $k = (q+1)^2$. Inoltre esiste qualche retta dello spazio secante K in esattamente un punto ed esiste qualche retta esterna ad esso.*

Dimostrazione. Quale che sia q , risulta $2 \neq (q+3)/2$, ne segue, per la Prop. III, la prima parte dell'asserto.

Siano ora $P \in K$ e $Q \in S_{3,q} - K$. La retta r per P e Q è al più q -secante K , onde, per la Prop. VI, esiste un piano π , $(q+1)$ -secante K per r . Se ciascuna delle $q+1$ rette di π per P possedesse un punto di K diverso da P , poiché $P \in K$, il piano π segherebbe K in almeno $q+2$ punti; deve allora esistere una retta di π per P secante K nel solo punto P .

Sia R un punto di $\pi \cap K$, diverso da P . La retta s , congiungente R a P , giace su π che è $(q+1)$ -secante K e, quindi, per la Prop. VI, possiede un punto non di K e sia esso S . Una delle q rette di π per S , diversa da

s , è disgiunta da K (se ciascuna di esse segasse K in almeno un punto, poiché $S \not\subset K$ e la retta s è almeno 2-secante K , il piano π conterrebbe almeno $q+2$ punti di K), onde l'asserto.

XII. Se K è un k_2 di $S_{3,q}$ esso è ad almeno quattro caratteri diversi da zero nella dimensione uno.

Dimostrazione. Se K fosse a due soli caratteri, per la Prop. XI, sarebbe di tipo $(0, 1)_1$ e si ridurrebbe allora ad un solo punto; ma è $1 < (q+1)^2 = k$.

Se K fosse a tre caratteri nella dimensione uno, sarebbe di tipo $(0, 1, c)_1$ e ogni piano τ secante K in $2q+1$ punti, per la Prop. VI, lo segherebbe in un $(2q+1)$ -insieme di tipo $(1, c)_1$ rispetto alle rette di τ ; per la Prop. X, risulterebbe (cfr. (3.8)) $c = \sqrt{q} + 1, m = 2 = \sqrt{q}$, onde $q = 4, c = 3$. Un piano π secante K in $q+1$ punti lo segherebbe allora in un $(q+1)$ -insieme di classe $[0, 1, 3]_1$ rispetto alle rette di π ; su tal piano, per la Prop. VII, giacerebbero allora z_1 rette 3-secanti K , con $z_1 = 10/3$ (cfr. (3.3)) ove si faccia $m = 1, q = 4, \alpha = 0, \beta = 1, \gamma = c = 3$. Ciò è assurdo, dovendo essere z_1 un intero, onde l'asserto.

XIII. Se K è un k_2 di $S_{3,q}$ di tipo $(0, 1, c, d)_1$, risulta necessariamente $c = 2$, oppure è $q > 4$ e $c = 3$.

Dimostrazione. Sia r una retta d -secante K ; poiché è $d > 0$, per la Prop. VI, esiste almeno un piano $(2q+1)$ -secante K per r e sia esso τ . L'insieme $K' = \tau \cap K$ è di classe $[1, c, d]_1$ rispetto alle rette di τ (cfr. Prop. VI) e, per la Prop. VII, su tal piano giacciono esattamente z_2 rette d -secanti K' ove (cfr. (3.2)):

$$(4.1) \quad z_2 = \frac{2q(2q+1) - c(q^2 + 2q)}{(d-c)(d-1)}.$$

Poiché r è una d -secante K' su τ , il secondo membro della (4.1) è positivo, onde è: $c < 4 - 6/(q+2) < 4$; essendo c un intero maggiore di 1, risulta $c \leq 3$ e, se $q \leq 4, c = 2$, onde l'asserto.

XIV. Se K è un k_2 di $S_{3,q}$ di tipo $(0, 1, 3, d)_1$, è necessariamente: $d \leq q/2$, onde K non contiene rette.

Dimostrazione. Il numero delle rette d -secanti K e giacenti su di un piano τ , $(2q+1)$ -secante K , è dato dalla (4.1). Poiché è $c = 3$, risulta $q > 4$ (cfr. Prop. XIII) e, se fosse $d = q+1$, dalla (4.1) si avrebbe $z_2 = 1 + 2/(q-2)$; poiché tal numero non è un intero per $q > 4$, risulta $d < q+1$. Sia r una retta d -secante K e π un piano $(q+1)$ -secante K per essa, certamente esistente per la Prop. VI e poiché $d < q+1$; se P è uno dei $q+1-d (> 0)$ punti di $\pi \cap K$ non su r , l'insieme dei punti di $\pi \cap K$, contenuti nelle d rette congiungenti P ad $r \cap K$, ha evidentemente cardinalità non inferiore a $2d+1$ (poiché ciascuna di tali rette contiene due punti di K e dunque almeno tre, di cui due distinti da P e poiché P è un punto di K appartenente a tale insieme), onde è $2d+1 \leq |\pi \cap K| = q+1$, da cui l'asserto.

XV. Se K è un k_2 di $S_{3,q}$ di tipo $(0, 1, 2, d)_1$, ed è $d < q + 1$, cioè K non contiene rette, risulta $d \leq q/2 + 7/4$.

Dimostrazione. Sia τ un piano $(2q + 1)$ -secante K . Se P è un punto di $\tau \cap K$, per esso passano almeno due rette distinte di τ entrambe d -secanti K (altrimenti, passando per P al più una retta di τ , d -secante K , le restanti q rette di τ per P segherebbero K in al più un punto diverso da P e risulterebbe $|\tau \cap K| \leq d + q < 2q + 1 = |\tau \cap K|$), e siano esse r ed s . Poiché $|r \cup s \cap K| = 2(d - 1) + 1 < 2q + 1$, esiste un punto $Q \in \tau \cap K$ non contenuto in $r \cup s$. Per Q passano due rette distinte di τ , r' ed s' , entrambe distinte da r e s e d -secanti K . È ovviamente:

$$(4.2) \quad (r \cup s \cap K) \cup (r' \cup s' \cap K) \subseteq \tau \cap K.$$

Poiché i due insiemi tra parentesi nella (4.2) hanno al più quattro punti in comune e contengono ciascuno $2(d - 1) + 1$ punti, dalla (4.2) si deduce $2[2(d - 1) + 1] - 4 \leq |\tau \cap K| = 2q + 1$, onde l'asserto.

XVI. Sia K un k_2 di $S_{3,q}$ di tipo $(a, b, c, d)_1$, se è $d > q/2 + 7/4$, risulta $a = 0, b = 1, c = 2, d = q + 1$. Inoltre per ogni punto P dello spazio passa almeno una retta 2-secante K .

Dimostrazione. Per le Prop. XI, XIII, XIV e XV si ha la prima parte dell'asserto.

Se $P \in S_{3,q} - K$, le $q^2 + q + 1$ rette dello spazio per P sono la più 2-secanti K ; se ciascuna di esse fosse al più 1-secante K risulterebbe $k \leq q^2 + q + 1 < (q + 1)^2 = k$; per P passa allora una 2-secante K .

Se $P \in K$, sia Q uno dei $q^3 - q$ punti dello spazio non di K ; la retta r per P e Q è al più q -secante K e per essa passa almeno un piano π , $(q + 1)$ -secante K (cfr. Prop. VI). La retta congiungente P ad uno dei q punti di π da esso diversi è almeno 2-secante K e giacendo su π è allora secante K in esattamente 2 punti, onde l'asserto.

Dalle Prop. XII e XVI, per la Prop. VII di [6] (cfr. anche [1]) e poiché K non può contenere piani si ha la Prop. I.

5. IL CASO $n \geq 3$

In questo numero ci occuperemo dei k_n di $S_{3,q}$ con $n \geq 3$. Per la (1.1) risulta:

$$(5.1) \quad 3 \leq n \leq q \quad (3 \leq q).$$

Ogni k_n è ad almeno due caratteri nella dimensione uno; se K è un k_n a due caratteri rispetto alle rette, per quanto provato in [9] (e non potendo K , per definizione, coincidere con un piano o con il complementare di un piano), risulta:

$$(5.2) \quad k = \frac{1 + (q^2 + q + 1)(q + \sqrt{q} + q\sqrt{q})}{2}.$$

Poiché K verifica la (2.1) o la (2.2), non può verificare anche la (5.2), come subito si vede, eppertanto:

XVII. Ogni $k_n (n \geq 3)$ di $S_{3,q}$ è ad almeno tre caratteri nella dimensione uno.

Proveremo ora che:

XVIII. Se K è un $k_n (n \geq 3)$ di $S_{3,q}$ di tipo $(a, b, c)_1$, risulta necessariamente $a \geq 1$.

Dimostrazione. Se K verifica la (2.2) l'asserto segue dalla Prop. VI. Supponiamo dunque che K verifichi la (2.1). Se fosse $a = 0$ ogni piano τ , $(nq + 1)$ -secante K , lo segherebbe (cfr. Prop. VI) in un insieme di tipo $(b, c)_1$ rispetto alle rette di τ , onde, per la Prop. X ed essendo $b > a = 0$, risulterebbe $q = p^{2s}$, $b = 1$, $c = \sqrt{q} + 1$, $n = \sqrt{q}$; ogni piano π secante K in $(\sqrt{q} - 1)q + 1$ punti conterrebbe allora, per la Prop. VII, esattamente $2\sqrt{q}-1$ rette $(q + 1)$ -secanti K , ove:

$$(5.3) \quad z_{\sqrt{q}-1} = q^2 - 3q\sqrt{q} + 4q - 3\sqrt{q} + \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{q} + 1}.$$

Poiché l'espressione a secondo membro nella (5.3) non è mai un intero per $q > 1$, si ha l'asserto.

Proveremo inoltre che:

XIX. Se K è un $k_n (n \geq 3)$ di $S_{3,q}$ di tipo $(a, b, c)_1$ e verificante la (2.2), risulta necessariamente $a \geq 2$.

Dimostrazione. Se fosse $a = 1$, per la Prop. VI, un piano τ , secante K in $nq + 1$ punti, lo segherebbe in un insieme di tipo $(b, c)_1$, con $b > a = 1$, rispetto alle rette di τ ; per la Prop. X ciò non può accadere, onde è $a \neq 1$. Dalla Prop. XVIII si ha l'asserto.

Ricordiamo (cfr. n. 1) che un $k_n (n \geq 3)$ di $S_{3,q}$ verifica la condizione H se:

H) Esiste un piano π dello spazio, secante il k_n in un insieme a due caratteri rispetto alle rette di π .

Proveremo ora che:

XX. Sia K un k_n di $S_{3,q}$ di tipo $(a, b, c)_1$. Se K verifica la (2.2) ogni piano π dello spazio lo sega in un insieme di tipo $(a, b, c)_1$ rispetto alle rette di π , onde K non verifica la condizione H.

Dimostrazione. Per la Prop. XIX è $a \geq 2$. Sia r una retta a -secante K ; per la Prop. VI, per r passano due piani distinti π' e τ , secanti K in $(n-1)q + 1$ ed $nq + 1$ punti rispettivamente. Le sezioni $\pi' \cap K$ e $\tau \cap K$ sono di classe $[a, b, c]_1$ rispetto alle rette di π' e τ (rispettivamente); per la Prop. VII, il numero delle rette di π' e di τ a -secanti K è dato da x_{n-1} ed x_n (rispettivamente). Poiché $r \subset \pi' \cap \tau$, risulta:

$$(5.4) \quad x_{n-1} > 0, \quad x_n > 0.$$

Ogni piano π dello spazio sega K in un insieme di classe $[a, b, c]_1$ rispetto alle rette di π ; per la Prop. VII e la (5.4), π contiene qualche retta a -secante K .

Analogamente, essendo $2 \leq a < b < c$, si prova che ogni piano contiene qualche b -secante e qualche c -secante, onde l'asserto.

Procedendo come per la proposizione precedente, in forza delle Prop. XVIII, VI e VII si prova che:

XXI. Sia K un k_n di $S_{3,q}$ a tre caratteri rispetto alle rette e verificante la (2.1). Se K non contiene rette, esso non verifica la condizione H.

Proviamo infine che:

XXII. Sia K un k_n ($n \geq 3$) di $S_{3,q}$. Se K è di tipo $(a, b, c)_1$ e verifica la condizione H, q è necessariamente un quadrato e risulta $a = 1$, $b = n = \sqrt{q} + 1$, $c = q + 1$. Inoltre per ogni punto dello spazio passa qualche retta secante K in $\sqrt{q} + 1$ punti.

Dimostrazione. Per le Prop. III e XX, K verifica la (2.1), onde, per la Prop. XXI, è $c = q + 1$. Per la Prop. VI ogni piano π , secante K in $(n-1)q + 1$ punti, lo sega in un insieme di tipo $(a, b)_1$ rispetto alle rette di π . Poiché è $a \geq 1$ (cfr. Prop. XVIII), per la Prop. X e la (5.1), q è necessariamente un quadrato e risulta: $a = 1$, $b = \sqrt{q} + 1$, $n-1 = \sqrt{q}$. Procedendo come per la Prop. XVI si ha la restante parte dell'asserto.

Dalla Prop. XXII, per quanto provato in [3] e [8], si ha la Prop. II.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BARLOTTI (1955) - *Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo*, « Boll. U.M.I. », 10 (3), 498-506.
- [2] P. DEMBOWSKI (1968) - *Finite geometries*, « Ergebnisse der Math. », Springer, Berlin.
- [3] A. RUSSO (1971) - *Calotte hermitiane di un $S_{r,q}$* « Ricerche Mat. Napoli », 19.
- [4] B. SEGRE (1965) - *Forme e geometrie hermitiane, con particolare riguardo al caso finito*, « Ann. Mat. », 70 (4), 1-201.
- [5] G. TALLINI (1973) - *Graphic characterization of varieties in a Galois space*. Atti Convegno Internazionale di Teorie Combinatorie. « Acc. Naz. Lincei », 1-13.
- [6] G. TALLINI (1973) - *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Relazione n. 30, Ist. Mat. Univ. Napoli.
- [7] M. TALLINI SCAFATI (1966) - *$\{k, n\}$ -archi di un piano grafico finito, con particolare riguardo a quelli con due caratteri*. Nota I, II, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 40 (8), 812-818, 1020-1025.
- [8] M. TALLINI SCAFATI (1967) - *Caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di un $S_{r,q}$* , « Rend. Mat. Roma », 26, 273-303.
- [9] M. TALLINI SCAFATI (1973) - *Calotte di tipo (m, n) in uno spazio di Galois $S_{r,q}$* , « Rend. Acc. Naz. Lincei », 53 (8), 71-81.
- [10] M. TALLINI SCAFATI (1976) - *Sui k -insiemi di uno spazio di Galois $S_{r,q}$ a due caratteri nella dimensione d* , « Rend. Acc. Naz. Lincei », giugno.
- [11] J. A. THAS (1973) - *A combinatorial problem*, « Geometriae dedicata », 1, 236-240.