

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

FULVIO RICCI

**Su alcuni quozienti dell'algebra di Fourier centrale di  
un gruppo di Lie compatto**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 62 (1977), n.4, p. 451–454.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1977\\_8\\_62\\_4\\_451\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_4_451_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Teoria dei gruppi.** — *Su alcuni quozienti dell'algebra di Fourier centrale di un gruppo di Lie compatto.* Nota di FULVIO RICCI, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this Note we give a proof for the particular case of the group  $SU(2)$  of a local characterization of the central Fourier algebra  $A_C(G)$  of a compact Lie group  $G$  in terms of the Fourier algebra of a maximal torus of  $G$ . The proof for the general case will appear elsewhere [5]. We derive a result on local symbolic calculus for  $A_C(G)$  which partially extends a theorem of M. P. and P. Malliavin.

1. Se  $G$  è un gruppo di Lie compatto e connesso, si definisce  $A(G)$  come lo spazio delle funzioni su  $G$  la cui serie di Fourier

$$\sum_{\lambda \in \hat{G}} d(\lambda) \operatorname{tr}(\hat{f}(\lambda) U^\lambda(g))$$

è assolutamente convergente.  $\hat{G}$  è l'insieme delle classi di equivalenza delle rappresentazioni unitarie irriducibili di  $G$ ,  $U^\lambda$  è una rappresentazione nella classe  $\lambda \in \hat{G}$ ,

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(g) U^\lambda(g^{-1}) dg$$

e  $d(\lambda)$  è la dimensione della rappresentazione  $U^\lambda$ .

$A(G)$  è un'algebra di Banach per il prodotto puntuale con la norma

$$\|f\|_A = \sum_{\lambda \in \hat{G}} d(\lambda) \operatorname{tr}(|\hat{f}(\lambda)|)$$

dove  $|\hat{f}(\lambda)|$  è la radice quadrata non negativa di  $\hat{f}(\lambda) \hat{f}(\lambda)^*$  (vedi [3]).

Con  $A_C(G)$  indichiamo la sottoalgebra di  $A(G)$  costituita dalle funzioni invarianti per automorfismi interni di  $G$ , tali cioè che  $f(gg') = f(g'g)$  per ogni  $g, g' \in G$ . Tali funzioni sono dette centrali perché sono le funzioni di  $A(G)$  appartenenti al centro dell'algebra di gruppo  $L^1(G)$ .

Le funzioni di  $A_C(G)$  sono della forma

$$f(g) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} a_\lambda \chi_\lambda(g) \quad , \quad \sum_{\lambda \in \hat{G}} d(\lambda) |a_\lambda| < \infty ,$$

dove  $\chi_\lambda$  è il carattere della rappresentazione  $U^\lambda$ ,

$$\chi_\lambda(g) = \operatorname{tr} U^\lambda(g) ,$$

e

$$a_\lambda = \int_G f(g) \chi_\lambda(g^{-1}) dg .$$

(\*) Nella seduta del 16 aprile 1977.

Si ha

$$\|f\|_A = \sum_{\lambda \in \hat{G}} d(\lambda) |a_\lambda|.$$

Se  $T$  è un toro massimale di  $G$ , le funzioni di  $A_C(G)$  sono univocamente determinate dalla loro restrizione a  $T$ .  $T$  è un gruppo abeliano, isomorfo a  $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^l$ , dove  $l = \text{rank } G$ . Scopo di questo lavoro è considerare  $A_C(G)$  come un'algebra di funzioni definite su  $T$  e studiarla in rapporto alla struttura di gruppo abeliano di  $T$ .

2. Un esempio è fornito dal gruppo

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Un toro massimale è

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = g_t \mid t \in [-\pi, \pi] \right\}.$$

Le rappresentazioni di  $SU(2)$  si possono parametrizzare con i naturali e, identificando l'elemento  $g_t$  col numero reale  $t$ , si ha

$$\chi_n(t) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t} = \begin{cases} 2 \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \cos(2k+1)t & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n/2} \cos 2kt & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

(vedi [1]).

Si ha  $d(n) = n+1$ , per cui  $A_C(SU(2))$  consiste delle funzioni

$$(1) \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |a_n| < \infty.$$

Tali funzioni sono pari, in conseguenza del fatto che  $g_t$  e  $g_{-t}$  sono coniugati in  $SU(2)$ .

Derivando la serie nella (1) termine a termine, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(n+1) \cos(n+1)t \sin t - \sin(n+1)t \cos t}{\sin^2 t}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n [(n+1) \cos(n+1)t \sin t - \sin(n+1)t \cos t]$$

converge ad una funzione in  $A(T)$ , per cui, se  $t_0$  non è un multiplo di  $\pi$ ,  $f$  è derivabile nell'intorno di  $t_0$  e la sua derivata coincide in un intorno di  $t_0$ , la cui chiusura non contenga multipli di  $\pi$ , con una funzione in  $A(T)$ .

Viceversa, sia  $f$  una funzione definita in un intorno di  $t_0 \notin \pi\mathbf{Z}$ , la cui derivata sia in quell'intorno la somma di una serie di Fourier assolutamente convergente. Esiste dunque  $\varphi \in A(T)$  uguale a  $f'$  in  $U$ , essendo  $U$  un intervallo  $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ , con  $\epsilon < \text{dist}(t_0, \pi\mathbf{Z})$ .

Sia  $\psi \in C'(T)$  con  $\text{supp } \psi \subset U$  e  $\psi = 1$  su un intorno  $V$  di  $t_0$  contenuto in  $U$ . Allora  $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)\psi(t) - \varphi(-t)\psi(-t)$  è una funzione dispari che coincide con  $f'$  su  $V$ . Si ha

$$\tilde{\varphi}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nt, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty.$$

Quindi su  $V$ ,  $f$  coincide con la funzione

$$h(t) = a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} \cos nt.$$

Ma  $\|\cos nt\|_{A(SU(2))} = \|\frac{1}{2}(\chi_n - \chi_{n-2})\| = n$ ,

per cui

$$\|h\|_{A(SU(2))} \leq |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty.$$

Abbiamo quindi il seguente

**THEOREMA 1.** *Sia  $f$  una funzione definita in  $(a, b) \subset (0, \pi)$ ;  $f$  si estende ad una funzione in  $A_C(SU(2))$  se, e soltanto se,  $f$  è derivabile e  $f'$  si estende ad una funzione in  $A(T)$ .*

3. Questo risultato si estende ad un gruppo di Lie compatto e connesso qualunque.

Sia  $\mathfrak{g}$  l'algebra di Lie di  $G$ . Allora  $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_1$ , dove  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  è il centro di  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}_1$  è semisemplice. Se  $\mathfrak{h}$  è una sottoalgebra di Cartan di  $\mathfrak{g}_1$ ,  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{t}$  è l'algebra di Lie di un toro massimale  $T$ .

Sia  $\Delta^+$  il sistema delle radici positive di  $\mathfrak{g}_1$  associato ad  $\mathfrak{h}$ ;  $\Delta^+$  individua, per mezzo della forma di Killing, un sottoinsieme  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  di  $\mathfrak{h}$ , e quindi un insieme finito di campi vettoriali invarianti su  $T$ . Di conseguenza, se  $B \subset \Delta^+$ , è definito un operatore differenziale invariante  $L_B$  di ordine  $|B|$  su  $T$ , dato dal prodotto  $\prod_{\alpha \in B} \alpha$ , che non dipende dall'ordine dei fattori.

Un elemento  $g$  di  $T$  si dice regolare se  $g = \exp_G x$  e il normalizzatore di  $x$  in  $\mathfrak{g}$  è  $\mathfrak{t}$ . Gli elementi regolari formano un aperto denso in  $T$ .

Il seguente teorema si troverà dimostrato in [5]:

**THEOREMA 2.** *Sia  $f$  una funzione definita su un aperto  $U$  di  $T$  connesso, e la cui chiusura sia tutta costituita da elementi regolari. Allora  $f$  è la restrizione di una funzione in  $A_C(G)$  se, e soltanto se, per ogni  $B \subset \Delta^+$   $L_B f$  è la restrizione di una funzione in  $A(T)$ .*

4. Sia  $G$  un gruppo localmente compatto, e sia  $E$  un chiuso di  $G$ .  $A(E)$  è l'algebra delle restrizioni ad  $E$  degli elementi di  $A(G)$ .

Una funzione complessa  $\varphi$  definita su un intervallo  $I$  della retta opera su  $A(E)$  se, per ogni  $f \in A(E)$  con  $f(E) \subset I$ , si ha  $\varphi \circ f \in A(E)$ .

Se  $E$  è un intervallo di  $\mathbf{R}$  e  $\varphi$  opera su  $A(E)$ , allora  $\varphi$  è analitica reale [6]. Con la stessa tecnica usata in [4], possiamo dimostrare che, se  $G$  è un gruppo di Lie ed  $E$  ha parte interna non vuota, le funzioni che operano su  $A(E)$  sono analitiche reali. Sia infatti  $H$  un toro di dimensione uno in  $G$ ; allora l'algebra di Fourier di  $H$ ,  $A(H)$ , consiste esattamente nelle restrizioni ad  $H$  delle funzioni di  $A(G)$  (vedi [2]). Possiamo supporre che l'identità di  $G$  sia interna ad  $E$ . Allora se  $f \in A(E)$ ,  $f|_{H \cap E} \in A(H \cap E)$ ; ne segue che, se  $\varphi$  opera su  $A(E)$ , essa opera anche su  $A(H \cap E)$  ed è perciò analitica reale.

Per l'algebra  $A_C(G)$  di un gruppo compatto semisemplice la situazione è diversa. È stato dimostrato in [4] che le funzioni di classe  $C^8$  operano su  $A_C(SU(3))$ . Enunciamo qui un teorema di carattere locale in una situazione più generale, rimandando per la dimostrazione a [5].

**THEOREMA 3.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie compatto semisemplice,  $T$  un suo toro massimale ed  $E$  un chiuso di  $T$  costituito da elementi regolari. Supponiamo che  $\text{rank } G < (\dim G + 2)/4$ . Se  $\varphi$  è una funzione di variabile reale di classe  $C^{r+\alpha}$  con  $r + \alpha > n/2$ , allora  $\varphi$  opera su  $A_C(E)$ .*

Ricordiamo che  $C^{r+\alpha}(\mathbf{R})$  è lo spazio delle funzioni su  $\mathbf{R}$  la cui derivata  $r$ -esima è lipschitziana di ordine  $\alpha$ .

Osserviamo che tutti i gruppi di Lie semplici compatti soddisfano la condizione richiesta dal teorema.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] R. COIFMAN e G. WEISS (1971) - *Analyse Harmonique Non-Commutative sur certains Espaces Homogenes*, « Lecture Notes », 242, Springer.
- [2] C. HERZ (1972) - *Problems of extrapolation and spectral synthesis on groups*, « Lecture Notes », 266, Springer.
- [3] E. HEWITT e K. A. ROSS (1970) - *Abstract Harmonic Analysis*, vol. II, Springer.
- [4] M. P. e P. MALLIAVIN, (1972) - *Calcul symbolique sur l'algebre de Wiener centrale de  $SU(3)$* , « Lecture Notes », 266, Springer.
- [5] F. RICCI, *Local properties of the central Wiener algebra on the regular set of a compact Lie group*. - Di prossima pubblicazione sul « Bulletin des Sciences Mathématiques ».
- [6] W. RUDIN (1967) - *Fourier Analysis on Groups*, Interscience.