Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Andrea Fort

Gruppi finiti in cui ogni sottogruppo è Dedekind-sensitivo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.4, p. 444–450.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_4_444_0>

Teoria dei gruppi. — *Gruppi finiti in cui ogni sottogruppo è Dedekind-sensitivo* (*). Nota di ANDREA FORT, presentata (**) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — A characterization is given of the class of finite groups in which every subgroup is Dedekind-sensitive.

INTRODUZIONE

Lo studio della mappa intersezione e la connessa nozione di « sensitività » rispetto ad una proprietà di immersione di un sottogruppo in un gruppo ha portato diversi Autori ad individuare particolari classi gruppali (cfr. Venzke [10], Bauman [1], Kramer [6], Wielandt [11], Huppert [4], [5], [11]).

In tale contesto, la presente Nota è dedicata ad una caratterizzazione dei gruppi finiti ogni cui sottogruppo è Dedekind-sensitivo, e si fornisce, per così dire, l'analogo reticolare dello studio, fatto da Bauman [1], dei gruppi finiti ogni cui sottogruppo è normale-sensitivo.

Un elemento a di un reticolo L si dice Dedekind-sensitivo (in L) se per ogni $x \underset{d}{\leq} a$ esiste $d \underset{d}{\leq} \mathrm{L}$ tale che $d \wedge a = x$: in altre parole la posizione $\varphi_a : y \rightarrow y \wedge a$ individua una mappa suriettiva dell'insieme degli elementi di Dedekind [(1)] di L sull'insieme degli elementi di Dedekind dell'ideale $\{x \mid x \in \mathrm{L}, x \leq a\}$.

Se H è sottogruppo del gruppo G, diremo che H è Dedekind-sensitivo (in G) se, in quanto elemento del reticolo dei sottogruppi di G, H è Dedekind-sensitivo. La classe dei gruppi finiti ogni cui sottogruppo è Dedekind-sensitivo sarà indicata con $\mathcal{D}_s$ ed un gruppo in tale classe si dirà un $\mathcal{D}_s$-gruppo.

Proveremo che un gruppo finito è in $\mathcal{D}_s$ se e solo se è prodotto diretto di sottogruppi di Hall i quali sono o p-gruppi modulari oppure gruppi di ordine composto quali descritti nel Teorema 4.

La nomenclatura e le notazioni sono conformi a quelle di Schenkman [7]. Inoltre se G è un gruppo, denotiamo con G_p un suo p-sottogruppo di Sylow e con F (G) il suo sottogruppo di Fitting; scriviamo $\mathrm{H} \underset{d}{\leq} \mathrm{G}$ $(\mathrm{H} \underset{q}{\leq} \mathrm{G})$ per indicare che H è sottogruppo di Dedekind (quasinormale) in G. C_n oppure $\overline{\mathrm{C}}_n$ denota un gruppo ciclico di ordine n.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 16 aprile 1977.

(1) Un elemento d del reticolo L è di Dedekind (in L) se

$$(x \vee d) \wedge y = x \vee (d \wedge y) \quad \text{per } x, y \in \mathrm{L} \quad \text{e } x \leq y$$

e

$$(d \vee x) \wedge y = d \vee (x \wedge y) \quad \text{per } x, y \in \mathrm{L} \quad \text{e } d \leq y .$$

Se $x \in \mathrm{L}$, $\mathrm{d} \underset{d}{\leq} x$ significa che d è elemento di Dedekind in $\{y \mid y \in \mathrm{L}, y \leq x\}$.

1. RISULTATI PRELIMINARI

LEMMA 1. *Sia L un reticolo ogni cui elemento è Dedekind-sensitivo.*

a) Per ogni $x \in L$, *gli elementi del reticolo* $(x) = \{y \mid y \in L, y \leq x\}$ *sono Dedekind-sensitivi.*

b) Se $d \underset{d}{\leq} L$, $L/d = \{y \mid y \in L, y \geq d\}$ *è un reticolo ogni cui elemento è Dedekind-sensitivo.*

Dimostrazione:

a) Sia $a \underset{d}{\leq} b < x$. Allora $a = b \wedge c$ con $c \underset{d}{\leq} L$ e risulta

$$a = (b \wedge x) \wedge c = b \wedge (x \wedge c) \quad \text{con} \quad x \wedge c \underset{d}{\leq} x .$$

b) Sia $a \underset{d}{\leq} b/d$; allora $d \leq a \underset{d}{\leq} b$ e risulta $a = b \wedge c$ con $c \underset{d}{\leq} L$ e quindi $c \underset{d}{\leq} L/d$.

LEMMA 2. L_1 *ed* L_2 *sono reticoli ogni cui elemento è Dedekind-sensitivo se e solo se ogni elemento di* $L_1 \times L_2$ *è Dedekind-sensitivo.*

Dimostrazione. «Se»: consegue dal Lemma 1. «Solo se»: siano (h_1, h_2), (k_1, k_2) elementi di $L_1 \times L_2$ con $(h_1, h_2) \underset{d}{\leq} (k_1, k_2)$. Risulta $h_i \underset{d}{\leq} k_i$ per $i = 1, 2$; pertanto esistono $d_i \underset{d}{\leq} L_i$ tali che $h_i = k_i \wedge d_i$ per $i = 1, 2$. Ne consegue $(d_1, d_2) \underset{d}{\leq} L_1 \times L_2$ e $(d_1, d_2) \wedge (k_1, k_2) = (h_1, h_2)$.

Conseguenza immediata dei lemmi precedenti nell'ambito dei reticoli gruppali è la seguente

PROPOSIZIONE 1. *La classe* $\mathcal{D}_s$ *è chiusa rispetto alla formazione di sottogruppi, immagini epimorfe e prodotti diretti finiti con tutti i fattori di Hall.*

Osservazione. Un prodotto diretto di $\mathcal{D}_s$-gruppi non sempre è $\mathcal{D}_s$-gruppo come si può verificare considerando $C_3 \times D_6$ ove D_6 denota il gruppo diedrale di ordine 6: in esso il 3-sottogruppo di Sylow non è Dedekind-sensitivo.

LEMMA 3. *Sia L un reticolo e sia a elemento sub-Dedekind*[(2)] *di L. Per ogni* $c \in L$ *tale che* $a \vee c \succ a$[(3)] *risulta* $a \wedge c \prec c$.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione sulla lunghezza minima di una catena che rende a elemento sub-Dedekind di L. Se tale lunghezza è 0 oppure 1 l'asserto è triviale. Sia dunque $a \underset{d}{\leq} a_1 \underset{d}{\leq} \cdots \underset{d}{\leq} a_{n-1} \underset{d}{\leq} L$ con

(2) Diciamo che a è sub-Dedekind in L se esistono $a_0, a_1, \cdots, a_n \in L$ tali che $a = a_0 \underset{d}{\leq} a_1 \underset{d}{\leq} \cdots \underset{d}{\leq} a_n \underset{d}{\leq} L$.

(3) Se S è un insieme parzialmente ordinato e $x, y \in S$, $x \prec y$ significa che $x \lneq y$ e che da $x \leq z \leq y$ consegue $z = x$ oppure $z = y$.

$n > 1$. Se $a \vee c > a$ allora da $a \leq (a \vee c) \wedge a_{n-1} \leq a \wedge c$ consegue $a_{n-1} \wedge (a \vee c) = a$ oppure $a_{n-1} \wedge (a \vee c) = a \vee c$.

Nel primo caso risulta $a \underset{d}{\leq} a \vee c$, e l'asserto è vero; nel secondo caso a è elemento sub-Dedekind di $\{x \mid x \in L, x \leq a_{n-1}\}$ e l'asserto è vero per induzione.

2. Caratterizzazione dei $\mathcal{D}_s$-gruppi

Lemma 4. *Un p-gruppo finito è $\mathcal{D}_s$-gruppo se e solo se è modulare.*

Dimostrazione. « Se »: ovvia. « Solo se »: per il Lemma 1 un controesempio minimale G è minimale non modulare. Allora esiste $H \lhd G$ con G/H non modulare di ordine p^3 (cfr. Suzuki [9], p. 14) e G/H non è $\mathcal{D}_s$-gruppo giacché i suoi sottogruppi non centrali di ordine p sono contenuti in un solo sottogruppo di ordine p^2: assurdo.

Corollario. *Un gruppo finito nilpotente è $\mathcal{D}_s$-gruppo se e solo se è modulare.*

Teorema 1. *Un $\mathcal{D}_s$-gruppo è supersolubile.*

Dimostrazione. Sia G un controesempio di ordine minimo. Allora ogni sottogruppo proprio ed ogni immagine epimorfa propria di G è supersolubile. Dunque $G = [G_p] K$, $\Phi(G) = \langle 1 \rangle$ e G_p è l'unico sottogruppo normale minimo di G (cfr. Doerk [2]), pertanto G_p è abeliano elementare non ciclico. Sia $P \lessdot G_p$, allora P non è di Dedekind altrimenti, essendo quasinormale, sarebbe normale. Dunque esiste $D \underset{d}{\leq} G$ tale che $P = D \wedge G_p$ con $D_G = \langle 1 \rangle$ giacché $D_G \ngeq G_p$: ne risulta che D^G è supersolubilmente immerso in G (cfr. Schmidt [8] Th. 1.2.), e ciò è assurdo giacché $D^G \geq G_p$ e G_p è l'unico sottogruppo normale minimo di G.

Teorema 2. *Un $\mathcal{D}_s$-gruppo* G *è sottomodulare.*

Dimostrazione. Per il Lemma 3 basta provare che ogni elemento del reticolo L (G) dei sottogruppi di G, è sub-Dedekind e per il Lemma 1 basta allora provare che ogni sottogruppo massimale di G è di Dedekind in G.

Sia dunque G un controesempio di ordine minimo: $G = [G_p] K$ con $K \neq \langle 1 \rangle$ e G_p sottogruppo di Sylow relativo al massimo primo divisore di $|G|$. G_p è abeliano elementare giacché $\Phi(G) = \langle 1 \rangle$. Se fosse $|G_p| \geq p^2$ allora, per il teorema di Maschke, G conterebbe due sottogruppi normali P_1 e P_2 di ordine p: allora G/P_1 e G/P_2 sarebbero sottomodulari (per la minimalità di G) e G stesso sarebbe isomorfo ad un sottogruppo del gruppo sottomodulare $G/P_1 \times G/P_2$. Dunque $|G_p| = p$ e G_p è l'unico sottogruppo normale minimo di G.

Pertanto $K_G = \langle 1 \rangle$, $\mathfrak{C}_G(G_p) = G_p$, $\mathfrak{Z}(G) = \langle 1 \rangle$ e K è ciclico essendo isomorfo ad un sottogruppo di Aut (G_p). Sia K_q un q-sottogruppo di Sylow di K con $p \neq q$. Se risulta $G = G_p K_q$ allora si ha $|K_q| = q$, altrimenti G conterrebbe un sottogruppo isomorfo a $[C_p] C_{p^2}$ con centro identico il cui sottogruppo di ordine pq non è Dedekind-sensitivo e ciò comporterebbe $G \notin \mathscr{D}_s$; ma allora $|G| = pq$ e G risulta modulare: assurdo. Pertanto K non ha ordine potenza di primo e G contiene un sottogruppo $H \simeq [C_p](C_q \times C_r)$ $(p, q, r$ primi distinti) con centro identico: e ciò è assurdo giacché in H i sottogruppi di ordine pq non sono Dedekind-sensitivi.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* G *un* $\mathscr{D}_s$*-gruppo. Se* $K \leq G$ *e* $G' \leq \mathscr{N}_G(K)$, *allora* $K \underset{d}{\leq} G$.

Dimostrazione. Supponiamo che K non sia di Dedekind in G. Poniamo $N = \mathscr{N}_G(K)$. Allora $N \lhd G$ essendo $G' \leq N$ ed esiste $D \underset{d}{\leq} G$ tale che $K = N \wedge D$: ne consegue $K \lhd D$ e quindi $D \leq N$, cosicché $D = K \underset{d}{\leq} G$: contraddizione.

COROLLARIO. *Se* G *è un* $\mathscr{D}_s$*-gruppo, i sottogruppi normali di* G' *ed i sottogruppi normali di* F (G) *sono di Dedekind in* G.

Dimostrazione. Essendo G supersolubile risulta $G' \leq F(G)$.

PROPOSIZIONE 3. *Sia* G *un* $\mathscr{D}_s$*-gruppo di ordine composto reticolarmente indecomponibile. Se* G_p *è il suo sottogruppo di Sylow relativo al massimo primo divisore di* $|G|$, *risulta* $G = [G_p] K$ *ove* G_p *è abeliano elementare e* K *induce automorfismi-potenza su* G_p.

Dimostrazione. Supponiamo che G_p non sia abeliano elementare: allora il p-sottogruppo di Sylow di $\Phi(G)$ è non triviale giacché $\Phi(G_p) \leq \Phi(G)$, e contiene, per la supersolubilità di G, un sottogruppo N di ordine p normale in G. G/N è reticolarmente indecomponibile giacché tale è $\dfrac{G/N}{\Phi(G/N)} \simeq \dfrac{G}{\Phi(G)}$ (cfr. Suzuki [9], p. 5): pertanto, ragionando per induzione possiamo concludere che G_p/N è abeliano elementare, così $\Phi(G_p) = N$, e che ogni elemento di KN/N ove K è il p-complemento di Sylow di G induce su G_p/N un automorfismo-potenza. Supponiamo che G_p contenga un elemento a di ordine p^2. Allora $N < \langle a \rangle$, dunque $\langle a \rangle \lhd G$ ed esiste un elemento $x \in K$ tale che $[a, x] \neq 1$, altrimenti K centralizzando $\langle a \rangle/N$ indurrebbe l'identità su $G_p/\Phi(G_p)$ e G_p sarebbe allora fattore diretto (cfr. Gorenstein [3] Th. 1.4., p. 174). Ne consegue che $\langle a, x \rangle / 3 \langle a, x \rangle$ contiene un sottogruppo isomorfo *a* $[C_{p^2}] C_p$ $(p, q$ primi distinti) con centro identico e questo non è un $\mathscr{D}_s$-gruppo giacché i suoi sottogruppi di ordine pq non sono Dedekind-sensitivi: assurdo. Allora G_p ha esponente p ed è modulare (Lemma 4), quindi è abeliano elementare: contraddizione.

Per provare l'ultimo asserto basta osservare che, essendo $G_p \leq F(G)$, ogni sottogruppo H di G_p è di Dedekind in G (Cor. alla Prop. 2); inoltre $H \lhd\lhd G$ e quindi H è quasinormale in G: pertanto $H \lhd G$.

TEOREMA 3. *Sia* G *un* $\mathcal{D}_s$*–gruppo. Allora* G *è un gruppo risolubile in cui la relazione di quasinormalità è transitiva.*

Dimostrazione. Per induzione su G. Sia $G = [G_p]\,K$. Se G_p è fattore diretto di G allora l'asserto è vero per induzione in quanto G è prodotto diretto di gruppi in cui la relazione di quasinormalità è transitiva. Sia ora $[G_p]\,K$ un prodotto non diretto e sia $A \underset{d}{\leq} B \underset{d}{\leq} G$.

Se $A \wedge G_p \neq \langle 1 \rangle$, allora $A \wedge G_p \lhd G$ per la Prop. 3 e $G/A \wedge G_p$ è un $\mathcal{D}_s$–gruppo di ordine minore di $|G|$: ne risulta $A/A \wedge G_p \underset{q}{\leq} G/A \wedge G_p$ e quindi $A \underset{q}{\leq} G$.

Se $A \wedge G_p = \langle 1 \rangle$, allora A è un p'–gruppo ed è permutabile con ogni p–sottogruppo di G; sia $\langle x \rangle$ un sottogruppo ciclico di G di ordine q^n (p, q primi distinti), e sia $\overline{K}$ un complemento di G_p contenente x: risulta $[B : B \wedge \overline{K}] = [B\overline{K} : \overline{K}] \mid [G : \overline{K}]$ e quindi $B \wedge \overline{K}$ è un p–complemento in B; inoltre $B \wedge \overline{K} \underset{q}{\leq} \overline{K}$, ed allora $A\,(B \wedge \overline{K})$ è un p'–gruppo e quindi $A\,(B \wedge \overline{K}) = B \wedge \overline{K}$: ne consegue $A \underset{q}{\leq} B \wedge \overline{K}$ e risulta $A \underset{q}{\leq} B \wedge \overline{K} \underset{q}{\leq} \overline{K}$. Per induzione si ha $A \underset{q}{\leq} \overline{K}$ e quindi $A \vee \langle x \rangle = A\,\langle x \rangle$: pertanto, essendo A permutabile con ogni sottogruppo ciclico di G, risulta $A \underset{q}{\leq} G$.

TEOREMA 4. *Un gruppo finito* G *reticolarmente indecomponibile è un* $\mathcal{D}_s$*–gruppo se e solo se soddisfa ad una delle seguenti condizioni:*

a) G *è un gruppo modulare.*

b) $G = [N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t]\,K$, $t \geq 1$, *ove:*

(i) N_i *e* p_i*–gruppo abeliano elementare di Sylow in* G;

(ii) K *è* p*–gruppo modulare inducente automorfismi–potenza su* $N_1 \times \cdots \times N_t$;

(iii) $\mathfrak{C}_K(N_1) = \mathfrak{C}_K(N_i)$ *per* $1 \leq i \leq t$, *e* $\mathfrak{C}_K(N_1)$ *è massimale in* K

Dimostrazione. Necessità. Se $G \in \mathcal{D}_s$, per il Teorema 3 ed un risultato di Zacher [12] risulta $G = [N]\,K$ con N abeliano elementare di Hall, K modulare nilpotente inducente automorfismi–potenza su N. Se $K = \langle 1 \rangle$ oppure se $N = \langle 1 \rangle$ allora G è un p–gruppo modulare, giacché, in ogni caso, è nilpotente e reticolarmente indecomponibile. Supponiamo ora $N \neq \langle 1 \rangle \neq K$. Sia K_1 un p_1–sottogruppo di Sylow di K e siano $N_1, N_2, \cdots, N_t$ i sottogruppi di Sylow di N tali che $[N_i, K_1] \neq \langle 1 \rangle$ per ogni i, $1 \leq i \leq t$. Siccome G è sottomodulare (Teor. 2) $\mathfrak{C}_K(N_i)$ ha indice primo in K per ogni i, $1 \leq i \leq t$, (cfr. Suzuki [9], p. 10), e quindi contiene tutti i sottogruppi di Sylow di K eccettuato K_1; allora $[N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t]\,K_1$ è fattore diretto di Hall in G e dato che G è reticolarmente indecomponibile, risulta $G = [N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t]\,K_1$; quindi $K_1 = K$ e K ha ordine potenza di primo. Rimane ancora da verificare che $\mathfrak{C}_K(N_i) = \mathfrak{C}_K(N_1)$ per $1 \leq i \leq t$. Supponiamo, per assurdo, che esista j tale che $\mathfrak{C}_K(N_j) \neq \mathfrak{C}_K(N_1)$; posto $M = \mathfrak{C}_K(N_j) \wedge \mathfrak{C}_K(N_1)$ si ha $M \lhd [N_1 \times N_j] K = L$ e L/M contiene un sottogruppo isomorfo ad un gruppo T del tipo seguente: $T = [C_{p_1} \times C_{p_j}] (\overline{C}_p \times C_p)$ (p_1, p_j, p primi distinti) ove C_p centralizza C_{p_1} ma non C_{p_j}, e $\overline{C}_p$ centralizza C_{p_j} ma non C_{p_1}: un tale gruppo non è in $\mathscr{D}_s$ giacché C_{p_1} non è di Dedekind in T mentre è di Dedekind in $\langle C_{p_1}, C_{p_j}, C_p \rangle$ e nessun sottogruppo di ordine p^2 è di Dedekind in T. D'altra parte T è $\mathscr{D}_s$-gruppo in quanto sottogruppo di un quoziente di un sottogruppo di G: contraddizione.

Sufficienza. Ovviamente basta trattare il caso in cui G soddisfa *a b*) (i), (ii), (iii). Ragioniamo per induzione e supponiamo che tutti i gruppi di questo tipo di ordine minore di $|G|$ siano $\mathscr{D}_s$-gruppi.

Sia $A \underset{d}{\leq} B \leq G = [N_1 \times \cdots \times N_t] K = [N] K$. Distinguiamo tre casi.

I caso: $A \wedge N \neq \langle 1 \rangle$. Allora $A \wedge N \lhd G$ e $G/A \wedge N$ è del tipo di G di ordine minore di $|G|$ oppure è modulare; in ogni caso $G/A \wedge N$ è un $\mathscr{D}_s$-gruppo ed esiste D tale che $A \wedge N \underset{d}{\leq} D \leq G$ e $A = B \wedge D$.

II caso: $A \wedge N = \langle 1 \rangle = B \wedge N$. Allora $NA \underset{d}{\leq} G$ e $NA \wedge B = A(N \wedge B) = A$.

III caso: $A \wedge N = \langle 1 \rangle \neq B \wedge N$. Sia $B = (B \wedge N) \overline{K}$ con $\overline{K}$ contenente A e sia K^* un complemento di N in G contenente $\overline{K}$. Allora $K^* \geq \overline{K} \geq A$ e $B \wedge K^* = \overline{K}$.

Se $A \leq \mathfrak{C}_{K^*}(N)$, essendo $A \underset{q}{\leq} K^*$, risulta $A \underset{q}{\leq} G$ e si ha trivialmente $A = B \wedge A$ con $A \underset{d}{\leq} G$. Supponiamo allora $A \nleq \mathfrak{C}_{K^*}(\overline{N})$. Sia $\overline{N}_1$ un sottogruppo di Sylow di B contenuto in N: senza ledere la generalità possiamo supporre $\overline{N}_1 \leq N_1$. Allora $A \leq \overline{N}_1 \overline{K}$ e pertanto risulta o $A \underset{q}{\leq} \overline{N}_1 \overline{K}$ oppure $A = \overline{K}$ (cfr. Schmidt 8, Th. 1.3.); il primo caso è da escludere perché comporta $A \lhd \overline{N}_1 A$ e quindi $A \leq \mathfrak{C}_{K^*}(N_1) = \mathfrak{C}_{K^*}(N)$. Dunque $A = \overline{K}$. Essendo $\overline{K} \underset{d}{\leq} B$ si ha che $B/\mathfrak{C}_{\overline{K}}(B \wedge N)$ è modulare indecomponibile: pertanto $B \wedge N$ è un gruppo di ordine potenza di primo e quindi $B = \overline{N}_1 \overline{K}$. Se N_1^* è un complemento di $\overline{N}_1$ in N allora $N_1^* K^* \underset{d}{\leq} G$ giacché $N_1^* K^* \geq N_1^* \mathfrak{C}_{K^*}(N)$ e $G/N_1^* \mathfrak{C}_{K^*}(N)$ è modulare. Ne consegue $N_1^* K^* \wedge B = K^* \wedge B = \overline{K} = A$. La dimostrazione del teorema è ora completa.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. BAUMAN (1974) – *The intersection map of subgroups*, «Arch. Math.», *25*, 337–340.

[2] K. DOERK (1966) – *Minimal nicht überauflösbare endliche Gruppen*, «Math. Zeit.», *91*, 198–205.

[3] D. GORENSTEIN (1968) – *Finite groups*. Harper & Row, New York.

[4] B. HUPPERT (1968) – *Zur Theorie der Formationen*, «Arch. Math.», *19*, 561–574.

[5] B. HUPPERT (1961) – *Subnormale Untergruppen und p-Sylowgruppen*, «Acta Sci. Szeged», *22*, 46–61.

[6] O. U. KRAMER (1975) – *Über Durchschnitte von Untergruppen endlicher auflösbarer Gruppen*, «Math. Zeit.», *148*, 89–97.

[7] E. SCHENKMAN (1965) – *Group theory*, Van Nostrand, Princeton.

[8] R. SCHMIDT (1975) – *Normal subgroups and lattice isomorphisms of finite groups*, « Proc. London Math. Soc. » (3), *30*, 287–300.

[9] M. SUZUKI (1956) – *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, « Erg. Math. », *10*, Springer, Berlin.

[10] P. VENZKE (1972) – *Finite groups with many maximal sensitive subgroups*, « J. Algebra », *22*, 297–308.

[11] H. WIELANDT e B. HUPPERT (1960) – *Arithmetical and normal structures of finite groups*. In: « Proc. Symp. Pure Math. », *6*, 17–30.

[12] G. ZACHER (1964) – *I gruppi risolubili finiti in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi-normali*, « Atti Accad. Lincei, Rend. Sc. fis. mat. e nat. », *37*, 150–154.