Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Domenico Lenzi, Angiola Letizia

Una generalizzazione della nozione di dominio di Dedekind

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.4, p. 428–431.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_4_428_0>

Algebra. — *Una generalizzazione della nozione di dominio di Dedekind.* Nota di DOMENICO LENZI e ANGIOLA LETIZIA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper we generalize the notion of Dedekind domain in terms of "criptofactoriality"; this allows to prove a necessary and sufficient condition for an integral domain to be a Dedekind Domain.

1. CONSIDERAZIONI PRELIMINARI

È noto [2] che, dato un semigruppo commutativo ed unitario $S(\perp)$, esso può essere preordinato mediante la relazione usualmente espressa dalla locuzione «a divide b» ($a\,|_{(\perp)}\,b$) e definita ponendo $a \leq_{(\perp)} b$ se, e soltanto se, $b = a \perp c$ con c opportuno elemento di S.

È altresì noto che la relazione $\sim_{(\perp)}$, definita ponendo $a \sim_{(\perp)} b$ se e soltanto se $a\,|_{(\perp)}\,b$ e $b\,|_{(\perp)}\,a$, è una relazione d'equivalenza (espressa con la locuzione «a è associato di b»); e che tale relazione si riduce alla relazione di eguaglianza se, e soltanto se, la relazione di preordine $\leq_{(\perp)}$ è una relazione d'ordine.

Inoltre, un elemento a di S è detto $(\perp)$–irriducibile se, e soltanto se, esso è non invertibile ed inoltre $a = x \perp y$ implica $a \sim_{(\perp)} x$ oppure $a \sim_{(\perp)} y$; è detto $(\perp)$–atomico se, e soltanto se, esso copre un elemento minimo per l'insieme preordinato $(S, \leq_{(\perp)})$ (1).

Ed ancora, un elemento a di S non invertibile è detto $(\perp)$–primo se, e soltanto se, $a \leq_{(\perp)} x \perp y$ implica $a \leq_{(\perp)} x$ oppure $a \leq_{(\perp)} y$; è detto ([2], Def. 1) $(\perp)$–quasi primo se, e soltanto se, per ogni elemento b di S e per ogni elemento $(\perp)$–atomico p di S, sussiste la seguente implicazione: $a \leq_{(\perp)} bp \Rightarrow (a \sim_{(\perp)} p$ oppure $a \leq_{(\perp)} b)$.

Ovviamente, ogni elemento a di S che sia $(\perp)$–primo risulta sia $(\perp)$–quasi primo che $(\perp)$–irriducibile. Inoltre ogni elemento a di S $(\perp)$–atomico è $(\perp)$–irriducibile; e, se in $S(\perp)$ vale la regola di semplificazione, ogni elemento $(\perp)$–irriducibile è $(\perp)$–atomico.

Sia ora $S(\vee, \wedge)$ un reticolo, onde $S(\vee)$ ed $S(\wedge)$ sono semigruppi commutativi. È immediato verificare che la relazione $\leq_{(\vee)}$ è una relazione d'ordine e che essa coincide con la relazione d'ordine associata ad $S(\vee, \wedge)$ definita ponendo $a \leq b$ se, e solo se, $a \vee b = b$; è altresì immediato verificare che la relazione $\leq_{(\wedge)}$ coincide con la relazione d'ordine duale della $\leq$ poc'anzi definita.

(*) Nella seduta del 16 aprile 1977.

(1) Per le nozioni di copertura e di minimo rispetto ad una relazione di preordine cfr. [2]. Tali nozioni si ottengono estendendo in modo naturale le analoghe nozioni note per insiemi ordinati.

Sia $A(+,\cdot)$ un dominio d'integrità unitario e sia $\mathscr{I}$ l'insieme degli ideali non nulli di A. Poiché A è privo di divisori dello zero, $\mathscr{I}$ costituisce un semigruppo commutativo (avente per elemento neutro A) sia rispetto alla usuale operazione reticolare di intersezione $(\cap)$ fra ideali, sia rispetto alla usuale operazione di prodotto $(\cdot)$ fra ideali secondo la quale, dati H e K ideali di A, $H\cdot K$ è l'ideale generato da tutti i possibili prodotti del tipo $h\cdot k$ con $h \in H$ e $k \in K$. Inoltre è noto, e si può verificare facilmente, che, dati comunque $H, K \in \mathscr{I}$ si ha $H \leq_{(\cdot)} K \Rightarrow H \supseteq K$; ciò è come dire

$$H \leq_{(\cdot)} K \Rightarrow H \leq_{(\cap)} K, \tag{1}$$

dal momento che (per quanto già detto in generale per i reticoli) risulta

$$H \supseteq K \Leftrightarrow H \leq_{(\cap)} K.$$

OSSERVAZIONE 1. Notiamo ora che, essendo $\leq_{(\cap)}$ una relazione d'ordine, in forza della (1) anche $\leq_{(\cdot)}$ lo è; per cui ogni elemento di $\mathscr{I}$ è associato solo di se stesso sia rispetto alla relazione $\sim_{(\cdot)}$ sia rispetto alla relazione $\sim_{(\cap)}$. Notiamo inoltre quanto segue:

(*a*) un elemento di $\mathscr{I}$ è $(\cap)$–atomico se, e soltanto se, esso è massimale rispetto alla relazione $\subseteq$;

(*b*) un elemento di $\mathscr{I}$ che sia $(\cap)$–atomico è $(\cdot)$–atomico;

(*c*) se la relazione $\leq_{(\cap)}$ è inclusa nella relazione $\leq_{(\cdot)}$ (e quindi coincidente con essa) ogni elemento di $\mathscr{I}$ che sia $(\cdot)$–atomico è primo [(2)];

(*d*) un elemento di $\mathscr{I}$ che sia ideale primo dell'anello A è $(\cap)$–primo; non è vero in generale il viceversa, anche quando le relazioni $\leq_{(\cdot)}$ e $\leq_{(\cap)}$ coincidono; per esempio non è difficile provare che nell'anello **Z** degli interi, rispetto al quale le relazioni $\leq_{(\cdot)}$ e $\leq_{(\cap)}$ coincidono, ideali generati da potenze non banali di numeri primi sono ideali $(\cap)$–primi che non sono primi. Si può verificare invece che coincidono i concetti di ideale primo e di ideale $(\cdot)$–primo, nel caso in cui le relazioni $\leq_{(\cdot)}$ e $\leq_{(\cap)}$ sono uguali in $\mathscr{I}$.

N.B. La nozione di irriducibilità per ideali che usualmente compare nella letteratura coincide con la nozione di $(\cap)$–irriducibilità.

2. ANELLI CRIPTODEDEKINDIANI

Un dominio d'integrità unitario verrà detto criptodedekindiano se il semigruppo moltiplicativo $\mathscr{I}(\cdot)$ dei suoi ideali non nulli è criptofattoriale [(3)].

Osserviamo che se A è un dominio criptodedekindiano, valendo in $\mathscr{I}(\cdot)$ la regola di semplificazione, risultano equivalenti per gli elementi di $\mathscr{I}$ i concetti di $(\cdot)$–atomicità e di $(\cdot)$–irriducibilità.

(2) Qui e nel seguito «primo» è inteso nel senso usuale adottato in teoria degli anelli (cfr. [3], Cap. III, par. 8).

(3) Per la nozione di criptofattorialità, cfr. [2], Def. 2.

Dai Teoremi 1 e 2 di [2] si ricavano immediatamente i seguenti teoremi

TEOREMA 1. *Sia* A *un dominio criptodedekindiano e sia* $\mathcal{I}$ *l'insieme dei suoi ideali non nulli. Risulta allora che per ogni* $H \in \mathcal{I}$, H *è minimo nella sua componente connessa oppure esistono e sono unici* $P_1, \cdots, P_r$ *elementi* $(\cdot)$-*atomici di* $\mathcal{I}$ *tali che* $H = M \cdot P_1, \cdots, P_r$ *con* M *minimo nella componente connessa di* H.

TEOREMA 2. *Sia* A *un dominio d'integrità unitario e sia* $\mathcal{I}(\cdot)$ *il semi-gruppo moltiplicativo dei suoi ideali non nulli. Se in* $\mathcal{I}(\cdot)$ *vale la regola di semplificazione (cioè se* $\mathcal{I}(\cdot)$ *è un mezzo-gruppo), e se ogni elemento* H *di* $\mathcal{I}$ *è fattorizzabile nel senso espresso dal Teor. 1, allora* A *è criptodedekindiano.*

Allo scopo di ottenere una caratterizzazione per anelli di Dedekind (cfr. [1], p. 217), premettiamo i seguenti due lemmi.

LEMMA 1. *Se* A *è un dominio di Dedekind ed* $\mathcal{I}$ *è l'insieme dei suoi ideali non nulli, si ha che, dati comunque* $H, K \in \mathcal{I}$, $H \leq_{(\cap)} K \Leftrightarrow H \leq_{(\cdot)} K$ (4).

Dimostrazione. L'implicazione da destra verso sinistra risulta vera in generale per quanto già osservato nel n. 1, avendo presente che $H \leq_{(\cap)} K$ equivale a $H \supseteq K$. Dimostriamo ora l'implicazione da sinistra verso destra.

Si ha intanto che se $H = A$ l'asserto è ovviamente vero; supponiamo allora $H \neq A$ (e quindi $K \neq A$) e sia $K = P_1, \cdots, P_r$ con $P_1, \cdots, P_r$ ideali primi e non banali di A (cfr. [1], Teor. 6, p. 218).

Se H è un ideale primo, l'asserto è vero in quanto risultando $H \supseteq P_1 \cdot P_2, \cdots, P_r$ si ha che $P_i \subseteq H$, per un certo i compreso tra 1 ed r, e quindi $H = P_i$ poiché P_i è massimale (cfr. [3], Lemma 2, p. 219); da ciò segue che $H \leq_{(\cdot)} K$.

Completiamo la dimostrazione per induzione, supponendo l'asserto vero per ideali propri e non nulli di A che siano prodotto di $n - 1$ ideali primi (che sono ovviamente non banali) e dimostrandolo vero per ideali proprii e non nulli di A che siano prodotto di n ideali primi. Sia pertanto $K \subseteq H$ con $H = Q_1 \cdots Q_n$, dove $Q_1, \cdots, Q_n$ sono ideali primi non banali di A; si ha allora, indicato con Q_n^{-1} l'ideale frazionario (5) inverso di Q_n, che $K \cdot Q_n^{-1} \subseteq Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_{n-1}$; ed osservato che $K \cdot Q_n^{-1}$ è un ideale intero (infatti è incluso in $Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_{n-1}$, che è un ideale non banale di A), grazie all'ipotesi induttiva segue che $Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_{n-1} \cdot T = K \cdot Q_n^{-1}$ con T opportuno ideale non nullo di A. Da ciò segue che $Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_{n-1} \cdot Q_n \cdot T = K$ e quindi $H \leq_{(\cdot)} K$, c.v.d.

LEMMA 2. *Se* A *è un dominio di Dedekind e se* $\mathcal{I}$ *è l'insieme dei suoi ideali non nulli si ha che ogni elemento di* $\mathcal{I}$, *distinto da* A, *che sia ideale primo di* A, *è* $(\cdot)$-*irriducibile.*

(4) Il risultato espresso dal Lemma 1, può essere ottenuto anche dal Teor. 11, p. 274 di [3].

(5) Per la nozione di ideale frazionario di un dominio unitario cfr. [1], Cap. IV, n. 17.

Dimostrazione. Basta ricordare che in un anello di Dedekind ogni ideale proprio, non nullo e primo è massimale (cfr. [1], Lemma 2, p. 219); di conseguenza esso è $(\cap)$–atomico (cfr. (*a*) dell'Osservazione 1). Tenendo poi conto della (*b*) della stessa Osservazione, si ha che esso è $(\cdot)$–atomico, e quindi $(\cdot)$–irriducibile, in quanto in $\mathcal{I}(\cdot)$ vale la regola di semplificazione (6).

Proviamo ora il seguente

TEOREMA 3. *Sia* A *un dominio d'integrità unitario e sia* $\mathcal{I}$ *l'insieme dei suoi ideali non nulli. Condizione necessaria e sufficiente affinché* A *sia un dominio di Dedekind è che esso sia criptodedekindiano e che, per ogni* H , K $\in \mathcal{I}$, *valga la seguente coimplicazione*: $H \leq_{(\cap)} K \Leftrightarrow H \leq_{(\cdot)} K$.

Dimostrazione. La condizione è necessaria in quanto vale il Lemma 1; inoltre, per il Lemma 2, il semigruppo $\mathcal{I}(\cdot)$ è fattoriale, e quindi è un semigruppo criptofattoriale.

Dimostriamo la sufficienza della condizione. A tale scopo, in virtù della (*c*) dell'Osservazione 1 basta dimostrare che, quale che sia $\mathcal{C}$ componente connessa del mezzo–gruppo $\mathcal{I}(\cdot)$, il minimo M di $\mathcal{C}$ coincide con A. Ragioniamo quindi per assurdo, supponendo M incluso propriamente in A; esiste allora un ideale P di A, massimale (e quindi, per le (*a*) e (*b*) dell'Osservazione 1, $(\cdot)$–atomico), che include M, cioè tale che $P \leq_{(\cap)} M$. Da ciò segue $P \leq_{(\cdot)} M$ e quindi $M = T \cdot P$, con T opportuno elemento di $\mathcal{I}$; poiché P è $(\cdot)$–atomico, si ha che $M \vdash T$ (cfr. [2], Corollario 1), il che è assurdo in quanto M è il minimo della componente connessa $\mathcal{C}$, onde l'asserto.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. CURZIO (1970) – *Lezioni di Algebra*, Napoli, Liguori.
[2] D. LENZI e A. LETIZIA (1975–1976) – *Semigruppi criptofattoriali*, « Atti dell'Acc. Scienze di Torino ».
[3] O. ZARISKI e P. SAMUEL – *Commutative algebra*, v. 1, New Jork, Van Nostrand Campany.

(6) In I $(\cdot)$ vale la regola di semplificazione in quanto esso è sottosemigruppo del gruppo degli ideali frazionari di A.