Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Edvige Pucci

Una classe di ∞^2 precessioni non regolari del girostato soggetto a sollecitazione newtoniana

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.3, p. 348–352.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_3_348_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Meccanica. — *Una classe di ∞^2 precessioni non regolari del girostato soggetto a sollecitazione newtoniana.* Nota di EDVIGE PUCCI, presentata [(*)] dal Corrisp. G. GRIOLI.

SUMMARY. — The class of semiregular vertical axis precessions of the first kind is determined for a gyrostat in a newtonian central field.

1. È noto che per un corpo rigido pesante con un punto fisso O non sono possibili moti di precessione semiregolare di prima specie (velocità di rotazione propria costante, velocità di precessione variabile nel tempo) con asse di precessione verticale. Moti di questo tipo non sono dinamicamente possibili nemmeno per un corpo rigido soggetto alla sollecitazione centrale di tipo newtoniano valutata in seconda approssimazione, cioè tenendo conto anche del secondo termine della serie di McCullagh [1], [2]. Si indica naturalmente come verticale la congiungente il punto fisso con il centro di attrazione Q [(1)].

Si riconosce, nella presente Nota, che moti di questo tipo sono invece dinamicamente possibili per un girostato soggetto alla sollecitazione newtoniana se e solo se la distribuzione invariabile delle masse verifica la condizione strutturale di Hess relativamente al punto fisso O, e il momento girostatico ha un valore opportuno.

Questi moti, di cui si determina l'intera classe, avvengono con asse di figura ortogonale ad una sezione ciclica dell'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso.

2. In un moto di precessione semiregolare di prima specie, la velocità angolare ha la forma:

$$\omega = \nu \boldsymbol{c} + \mu \boldsymbol{i}_3 \tag{0}$$

in cui ν è una funzione del tempo, μ è una costante non nulla, $\boldsymbol{c}$ un versore fisso nello spazio che si pone parallelo e concorde ad OQ, $\boldsymbol{i}_3$ un versore solidale al corpo, che si assume come terzo asse di una terna solidale

(*) Nella seduta del 12 marzo 1977.

(1) Sono possibili precessione regolari nel caso di prima approssimazione soltanto per il giroscopio e nel caso di seconda approssimazione anche per il corpo asimmetrico, ma non sono possibili moti di precessione semiregolare nei quali la velocità angolare vari effettivamente nel tempo.

$T(O, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ che può essere scelta in tutta generalità in modo che l'omografia d'inerzia σ abbia la forma ridotta:

$$\sigma = \begin{vmatrix} A & O & -B' \\ O & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{vmatrix}.$$

La sollecitazione newtoniana valutata in seconda approssimazione, ammette un potenziale della forma:

$$U = OG^* \cdot \boldsymbol{c} - \eta/2\, \boldsymbol{c} \cdot \sigma(\boldsymbol{c})$$

ed ha un momento

$$\mathbf{M}_0 = OG^* \times \boldsymbol{c} + \eta \boldsymbol{c} \times \sigma(\boldsymbol{c})$$

con

$$OG^* = hm\mathscr{M}\, OG/R^2 \quad ; \quad \eta = 3\, hm/R^3 \quad ; \quad OQ = R\boldsymbol{c}\ {}^{(2)}.$$

Una condizione necessaria per la possibilità dinamica di moti di precessione semiregolare di prima specie si determina, in analogia a quanto fatto in [2], dalla compatibilità degli integrali primi classici delle equazioni di Eulero Poisson:

$$(1) \qquad \nu^2 \sigma(\boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{c} + 2\mu\nu\sigma(\boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{i}_3 + \mu^2 \sigma(\boldsymbol{i}_3) \cdot \boldsymbol{i}_3 - 2\, OG^* \cdot \boldsymbol{c} + \eta \boldsymbol{c} \cdot \sigma(\boldsymbol{c}) = 2\, E_0$$

$$(2) \qquad \nu\sigma(\boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{c} + \sigma(\boldsymbol{i}_3) \cdot \boldsymbol{c} + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{c} = k_c$$

$$(3) \qquad \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} = 1.$$

e dalla relazione caratteristica delle precessioni (0):

$$c_3 = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{i}_3 = \sqrt{1 - a^2} \equiv \text{costante}.$$

Questa compatibilità va intesa nel senso che le tre equazioni algebriche (1), (2), (3) devono ammettere infinite soluzioni comuni con infiniti valori diversi per ciascuna delle tre variabili c_1, c_2, ν poiché si escludono oltre alle rotazioni, anche le precessioni regolari.

Combinando la (1) con la (2) è agevole eliminare i termini in ν^2 ottenendo l'equazione lineare in ν:

$$(4) \qquad \nu\mu\sigma(\boldsymbol{i}_3) \cdot \boldsymbol{c} - \nu \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{c} + \nu k_c + \eta\sigma(\boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{c} + \mu^2 \sigma(\boldsymbol{i}_3) \cdot \boldsymbol{i}_3 - 2\, OG^* \cdot \boldsymbol{c} - 2\, E_0 = 0$$

che sarà utilizzata in seguito al posto della (1).

Eliminando ν tra la (2) e la (4) si ottiene una equazione in c_1, c_2 che rappresenta una curva algebrica del quarto ordine che deve passare per i punti ciclici in base alla prescritta compatibilità con la (3).

(2) Si indicano in seguito con c_i, ξ_i, I_i le componenti in T di $\boldsymbol{c}$, OG^* ed $\mathbf{I}$ rispettivamente.

Da questa condizione si ottiene:

$$\eta\,(\mathrm{A}-\mathrm{B})=0.$$

Essendo $\eta \neq 0$ [3], eventuali precessioni del girostato soggetto a sollecitazione newtoniana valutata in seconda approssimazione, sono possibili solo se è $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, ossia se l'asse di figura è ortogonale ad una sezione ciclica dell'ellissoide d'inerzia.

Assunto dunque $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ e posto, in tutta generalità anche $\mathrm{B}'=0$, le equazioni (2) e (4) assumono la forma semplificata:

$$(2') \qquad [-2\,\mathrm{A}'\,c_2\,c_3+\mathrm{C}c_3^2+\mathrm{A}a^2]\,\nu+ \\ +[\mathrm{I}_1\,c_1+(-\mu\mathrm{A}'+\mathrm{I}_2)\,c_2-k_c+\mathrm{I}_3\,c_3+\mathrm{C}\mu c_3]=0$$

e

$$(4') \qquad [-\mathrm{I}_1\,c_1+(-\mu\mathrm{A}'-\mathrm{I}_2)\,c_2+k_c-\mathrm{I}_3\,c_3+\mathrm{C}\mu c_3]\,\nu+[-2\,\xi_1\,c_1+ \\ +(-2\,\xi_2\,c_2-2\,\eta\mathrm{A}'\,c_3)\,c_2+\eta\,(\mathrm{A}a^2+\mathrm{C}c_3^2)+\mathrm{C}\mu^2-2\,\xi_3\,c_3-2\,\mathrm{E}_0]=0.$$

Ripetendo il ragionamento già fatto e cioè eliminando ν tra (2′) e (4′) si ottiene una equazione in c_1, c_2 che rappresenta una curva algebrica non più del quarto ma del secondo ordine che è compatibile con la (3) se e solo se è:

I) $\mathrm{I}_1^2=\mathrm{I}_2^2-\mu^2\mathrm{A}'^2+4\,\mathrm{A}'\,c_3\,(\xi_2+\eta\mathrm{A}'\,c_3)$

II) $2\,\mathrm{A}'\,\xi_1\,c_3+\mathrm{I}_1\,\mathrm{I}_2=0$

III) $-\xi_1\,(\mathrm{A}a^2+\mathrm{C}c_3^2)-\mathrm{I}_1\,(k_c-\mathrm{I}_3\,c_3)=0$

IV) $-2\,\mathrm{A}'\,\eta c_3\,(\mathrm{A}a^2+\mathrm{C}c_3^2)-2\,\mathrm{A}'\,c_3\,(-\xi_3\,c_3-\mathrm{E}_0)-\xi_2\,(\mathrm{A}a^2+\mathrm{C}c_3^2)+$
$+\mathrm{I}_2\,(\mathrm{I}_3\,c_3-k_c)=0$

V) $\eta\,(\mathrm{A}a^2+\mathrm{C}c_3^2)^2+(\mathrm{A}a^2+\mathrm{C}c_3^2)\,(\mathrm{C}\mu^2-2\,\xi_3\,c_3-2\,\mathrm{E}_0)-\mathrm{C}^2\,\mu^2\,c_3^2+$
$+(k_c-\mathrm{I}_3\,c_3)^2=a^2\,\mathrm{I}_1^2.$

Posto che queste condizioni nelle grandezze strutturali e cinematiche siano verificate, e ricavato ν in funzione di c_1 e c_2 dalla (2′), il moto risulta determinato a meno di una quadratura. Questo moto è compatibile con gli integrali primi e verifica quindi la terza equazione di Eulero; la sua compatibilità dinamica è riconducibile quindi alla verifica della seconda equazione

(3) Porre $\eta=0$ equivale a valutare la sollecitazione in prima approssimazione, riconducendosi quindi al caso del girostato pesante.

In questo caso con ragionamenti del tutto analoghi a quelli utilizzati nel seguito di questa Nota si dimostra che condizione necessaria per la possibilità dinamica di moti di precessione semiregolare di prima specie è che il punto di sospensione coincida con il baricentro. Si ricade quindi nel caso del moto spontaneo; gli eventuali moti sono soluzioni particolari del caso di integrabilità di V. Volterra [3].

di Eulero, la prima essendo a questa equivalente. La seconda equazione di Eulero assume la forma semplificata:

$$(6)\qquad \begin{aligned}\dot{\nu}\,(Ac_2 - A' c_3) + \nu^2\,[(A - C)\,c_1 c_3 + A' c_1 c_2] + \\ + \nu\,[(-C\mu - I_3)\,c_1 + I_1 c_3] + \mu I_1 = \xi_3 c_1 - \xi_1 c_3 + \\ + \eta\,[(A - C)\,c_1 c_3 + A' c_1 c_2]\,.\end{aligned}$$

Derivando l'espressione di ν ricavata dalla $(2')$ e tenendo conto delle equazioni di Poisson si ottiene:

$$(5)\qquad \dot{\nu} = \mu\,\frac{[(I_2 - \mu A')\,c_1 - I_1 c_2]\,(Aa^2 + Cc_3^2) + 2\,A' I_1 a^2 c_3 - 2\,A' c_1 c_3\,(k_c - I_3 c_3 - C\mu c_3)}{(-2\,A' c_2 c_3 + Aa^2 + Cc_3^2)^2}\,.$$

Sostituendo nella (6) le espressioni di ν e $\dot{\nu}$ si ottiene una equazione algebrica in c_1 e c_2 che per la compatibilità del moto deve essere compatibile con la (3); la curva algebrica individuata da questa equazione deve contenere la circonferenza (3). Conviene preliminarmente imporre il passaggio per punti ciclici che fornisce le due ulteriori condizioni:

$$A' I_1 (\mu A' - I_2) = 0$$

$$A' [-I_1^2 + (\mu A' - I_2)^2 - 4\,\eta A'^2 c_3^2] = 0\,.$$

Queste, unitamente alle I) e II) danno luogo alle seguenti eventualità:

α) $A' = 0 \quad , \quad I_1 = I_2 = 0\,;$

β) $I_1 = 0 \quad , \quad \xi_1 = 0 \quad , \quad \xi_2 = \pm\sqrt{\eta}\,I_2 \quad , \quad I_2 = A'(\mu \mp 2\sqrt{\eta}\,c_3) \quad , \quad A' \neq 0,$

in cui si devono assumere i segni superiori od inferiori simultaneamente.

Nell'eventualità α) dalla (5) segue $\nu =$ costante e quindi eventuali moti di precessione sono in questo caso regolari.

Nell'eventualità β) la condizione III) risulta verificata, la IV) e la V) forniscono i valori delle costanti k_c ed E_0, e la verifica diretta della compatibilità della (6) con la (3) fornisce le ulteriori seguenti condizioni:

$$(7)\qquad (Aa^2 - Cc_3^2)^2 - 4\,c_3^4\,(AC - A'^2) = 0$$

$$(8)\qquad 2\,A' \xi_3 c_3^2 = \xi_2\,(2\,Ac_3^2 - Cc_3^2 + Aa^2)$$

$$(9)\qquad (I_2 - \mu A')\,(c_3^2 I_3 + \mu Aa^2) = -2\,A' \xi_3 c_3^2\,.$$

Tenendo conto di queste condizioni e dei valori individuati per k_c ed E_0 dalle IV) e V), la $(2')$ fornisce per ν le due seguenti espressioni

$$(10)\qquad \nu = \mp\sqrt{\eta} + \frac{\mu\,(Aa^2 - Cc_3^2)}{-2\,A' c_2 c_3 + c_3\,(Aa^2 + Cc_3^2)}$$

in relazione alle due possibili scelte del segno nell'eventualità β).

Le (7) e (8) sono compatibili tra loro (in c_3) se e solo se è verificata la condizione strutturale

$$\xi_2^2 (A^2 - AC + A'^2) - 2\, AA'\, \xi_2 \xi_3 + A'^2 \xi_3^2 = 0$$

che esprime, nella terna T, unitamente a $\xi_1 = 0$, la condizione strutturale di Hess.

3. In definitiva un moto di precessione semiregolare di prima specie ad asse verticale per un girostato soggetto a sollecitazione newtoniana è dinamicamente possibile se è verificata la condizione strutturale di Hess, se l'asse di figura è ortogonale ad una delle due sezioni cicliche dell'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso e se sono verificate le condizioni:

a_1) $I_1 = 0$,

a_2) $\xi_2 = \pm \sqrt{\eta}\, I_2$,

a_3) $\xi_3 c_3 = \pm \sqrt{\eta}\, (c_3^2 I_3 + \mu A a^2)$,

a_4) $\xi_2 = \pm \sqrt{\eta}\, A' (\mu \mp 2 \sqrt{\eta}\, c_3)$,

a_5) $(Aa^2 - Cc_3^2)^2 - 4\, c_4^3 (AC - A'^2) = 0$,

in cui si scelgono i segni inferiori e superiori simultaneamente.

Questi moti avvengono con velocità di precessione ν (effettivamente variabile nel tempo) espressa dalla (10).

Si noti che c_3 e μ sono individuate da a_4) e a_5) (4) e sono indipendenti dai valori delle componenti del momento girostatico.

Le a_1), a_2), a_3) forniscono infine, per ogni moto, cioè per ogni valore di c_3 e μ e nelle due diverse eventualità, in maniera univoca, i valori delle componenti in T del momento girostatico.

Si osservi infine che la velocità angolare di precessione ν dipende dal tempo per il tramite del coseno c_2 dell'angolo di rotazione propria e che in generale il primo termine dell'espressione (10) non è prevalente sull'altro; in taluni casi ν può assumere nel tempo valori anche di segno diverso e cioè il moto di precessione può risultare oscillatorio.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. PUCCI (1973) - *Sulle precessioni semiregolari di un solido pesante ad asse di precessione verticale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 54.

[2] E. PUCCI (1976) - *Esistenza e determinazione delle precessioni semiregolari ad asse verticale di un corpo rigido in un campo di forze newtoniano*, « Rend. Sem. Mat. Univ., Padova », 54.

[3] V. VOLTERRA (1956) - *Opere Matematiche*, Memorie, Note, Vol. 2, « Acc. Naz. Lincei, Roma ».

(4) La a_5) fornisce per c_3 i valori $c_3 = \pm \sqrt{A^*}/(\sqrt{C^*} \pm \sqrt{B^*})$ essendo $B^* < A^* < C^*$ i momenti principali d'inerzia relativi al punto fisso; la scelta dei segni è arbitraria ed indipendente dalla scelta effettuata nelle a_i). Due almeno di questi valori sono sempre accettabili, gli altri due lo sono se e solo se è $\sqrt{A^*} < \sqrt{C^*} - \sqrt{B^*}$.