
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ANGELO ALVINO

**Formule di maggiorazione e regolarizzazione per
soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine in
un caso limite**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 62 (1977), n.3, p. 335–340.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_3_335_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Equazioni a derivate parziali. — *Formule di maggiorazione e regolarizzazione per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine in un caso limite* (*). Nota di ANGELO ALVINO, presentata (**) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — We give an imbedding theorem for the weak solutions of the Dirichlet problem (2) when $f(x)$ is in certain Lorentz spaces: the main result (see Teorema 2) ensures the continuity of the weak solution when $f(x)$ is in the Lorentz space $L(n/2, 1)$; from this fact, via a duality argument, we improve known results for the weak solutions of the equation (4).

Si consideri il seguente operatore ellittico del secondo ordine

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij}(x) \partial_{x_j} u) + c(x) u$$

a coefficienti $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, reali, misurabili e limitati, definiti in un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, tali che si abbia

$$(I) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq |\xi|^2, \quad c(x) \geq 0.$$

Consideriamo il problema di Dirichlet

$$(2) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

essendo $f(x)$ una funzione appartenente allo spazio $L^{2n/(n+2)}(\Omega)$: per soluzione debole del problema (2) si intende una funzione $u(x)$ appartenente allo spazio di Sobolev $H_0^1(\Omega)$, tale che

$$a(u, \varphi) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} [a_{ij}(x) \partial_{x_i} \varphi \partial_{x_j} u + c(x) u \varphi] dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Indichiamo con $f^*(s)$ il riordinamento di $f(x)$: $f^*(s)$ è una funzione non crescente definita nell'intervallo $(0, \infty)$, tale che, per ogni $t > 0$

$$\text{mis} \{s : f^*(s) > t\} = \text{mis} \{x : |f(x)| > t\}.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1977.

Sussiste il seguente risultato la cui dimostrazione è dovuta a G. Talenti (cfr. [6], Teorema 1): se $v(x)$ è la soluzione del problema

$$(3) \quad \begin{cases} -\Delta v = f^*(C_n |x|^n) & \text{in } \Omega^* \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega^* \end{cases}$$

avendo indicato con Ω^* la sfera di R^n con centro nell'origine la cui misura coincide con quella di Ω , si ha $v(x) \geq u^*(C_n |x|^n)$, essendo $u^*(s)$ il riordinamento di $u(x)$. Tale risultato viene applicato in [6] (cfr. Teorema 2) per determinare le migliori costanti per alcune maggiorazioni a priori relative alle soluzioni deboli del problema (2): un primo risultato della seguente Nota consiste nel ricavare una maggiorazione a priori, con relativa migliore costante, delle soluzioni deboli del problema (2) in un caso limite non considerato in [6]. Da tale risultato si prende spunto per giungere ad un teorema di regolarità: precisamente, detto G l'operatore che ad ogni $f(x)$ associa la soluzione $u(x)$ del problema (2), è noto che, se $\partial\Omega$ è sufficientemente regolare, G è lineare e continuo da $L^p(\Omega)$ con $p > n/2$ allo spazio $C_0^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ delle funzioni holderiane con un opportuno indice λ , mentre, se $2n/(n+2) \leq p < n/2$, G è lineare e continuo da $L^p(\Omega)$ a $L^{p^{**}}(\Omega)$ essendo $1/p^{**} = 1/p - 2/n$; il risultato di regolarità cui accennavamo consiste nell'individuare una classe di funzioni, contenuta in ogni $L^p(\Omega)$ con $p < n/2$ e contenente ogni $L^p(\Omega)$ con $p > n/2$, tale che G è lineare e continuo da tale classe allo spazio delle funzioni $C_0^0(\overline{\Omega})$. Tale risultato permette inoltre di precisare alcuni teoremi di inclusione per soluzioni deboli dell'equazione

$$(4) \quad Lu = \mu$$

essendo μ una misura di Radon:

DEFINIZIONE 1 (cfr. [5], Definition 9.1). Se Ω è H_0^1 -ammissibile⁽²⁾, una funzione $u \in L^1(\Omega)$ è una soluzione debole dell'equazione (4) che si annulla su $\partial\Omega$, se

$$\int_{\Omega} u L\varphi \, dx = \int \varphi \, d\mu$$

per ogni funzione $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tale che $L\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$.

1. Cominciamo con l'introdurre alcuni spazi funzionali. Sia $f(x)$ una funzione misurabile, definita in Ω , e $f^*(s)$ il suo riordinamento; poniamo

$$(5) \quad f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds = \frac{1}{t} \sup \left\{ \int_E |f(x)| \, dx : \text{mis } E = t \right\}.$$

(1) $C_n = \Pi^{n/2}/\Gamma(1 + n/2)$ è la misura della sfera di R^n di raggio unitario; si dimostra facilmente che il riordinamento di $f^*(C_n |x|^n)$ è $f^*(s)$.

(2) Per tale nozione si veda [5] Definition 6.2.

Diciamo che la funzione $f(x)$ appartiene allo spazio di Lorentz $L(p, q)$ ⁽³⁾ se è finita la quantità

$$(6) \quad \|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} [f(t) t^{1/p}]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & 1 < p < \infty, \quad 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0} f(t) t^{1/p} & 1 < p < \infty, \quad q = \infty, \end{cases}$$

La (6) è una norma rispetto alla quale $L(p, q)$ è uno spazio di Banach. Ricordiamo che $L(p, p)$ coincide con $L^p(\Omega)$, mentre $L(p, \infty)$ è lo spazio delle funzione debolmente L^p che indicheremo anche con il simbolo L_{deb}^p . Sussiste il seguente risultato:

LEMMA 1. Sia Φ un generico funzionale lineare e continuo su $L(p, 1)$; esiste allora una e una sola funzione $g \in L(p', \infty)$, con p' esponente coniugato di p , tale che

$$(7) \quad \Phi(f) = \int fg \, dx \quad \forall f \in L(p, 1);$$

di più spazi $[L(p, 1)]^*$ e $L(p', \infty)$ sono equivalenti: è quindi possibile dotare $L(p', \infty)$ della seguente norma

$$|||g||| = \|\Phi_g\|_{[L(p,1)]^*}$$

essendo Φ_g il funzionale (7).

Dimostrazione. Accenniamo brevemente alla dimostrazione (cfr. anche [2], Teorema 6). Sia χ_E la funzione caratteristica dell'insieme $E \subseteq \Omega$; si ha, posto $\Phi(\chi_E) = \varphi(E)$

$$(8) \quad |\varphi(E)| = |\Phi(\chi_E)| \leq \|\Phi\| \|\chi_E\|_{p,1} = \|\Phi\| \frac{p^2}{p-1} (\text{mis } E)^{1/p}.$$

Per il Teorema di Vitali-Radon-Nikodym esiste una funzione integrabile $g(x)$ tale che

$$(9) \quad \varphi(E) = \int \chi_E g \, dx.$$

Dimostriamo che $g \in L(p', \infty)$; per semplicità supporremo $g(x) \geq 0$ ⁽⁴⁾: per la (5) si ha

$$t\bar{g}(t) = \sup \left\{ \int \chi_E g \, dx : \text{mis } E = t \right\}$$

(3) Per maggiori notizie relative a tali spazi rimandiamo a [3, 4].

(4) Se g non verifica tale ipotesi si prendono in considerazione le funzioni $g^+ = \max[g, 0]$ e $g^- = \max[-g, 0]$, osservando che $g = g^+ - g^-$.

e quindi, per le (8) e (9)

$$t\bar{g}(t) \leq \|\Phi\| \frac{p^2}{p-1} t^{1/p}$$

da cui l'asserto. Per quel che riguarda la seconda parte del lemma rimandiamo a [4] (cfr. Teorema 6.13).

Introduciamo ora i seguenti spazi già considerati in [1]: diciamo che una funzione $u(x)$, misurabile, appartiene allo spazio $X_s(\Omega)$, con $0 \leq s \leq 1$, se è finita la quantità

$$[u]_s = \sup \frac{u^*(C_n |x|^n)}{\left[\lg \frac{r_0}{|x|} \right]^s}$$

essendo $r_0 = (\text{mis } \Omega / C_n)^{1/n}$. La topologia che si intende introdotta in $X_s(\Omega)$ ⁽⁵⁾ è quella indotta dalla seguente convergenza

$$u_k \rightarrow u \quad \text{in } X_s(\Omega) \iff [u_k - u]_s \rightarrow 0.$$

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

TEOREMA I. *Se $f(x) \in L(n/2, v)$, la soluzione del problema (2) appartiene allo spazio $X_{1-1/v}(\Omega)$ e si ha*

$$(10) \quad [u]_{1-1/v} \leq n^{-1-1/v} C_n^{-2/n} \|f\|_{n/2, v}.$$

Dimostrazione. In base al risultato di Talenti descritto nell'introduzione ci si può limitare a dimostrare la (10) per il problema (3). La soluzione di tale problema è

$$v(x) = n^{-2} C_n^{-2/n} \int_{C_n |x|^n}^{\text{mis } \Omega} t^{-1+2/n} f(t) dt;$$

per la disuguaglianza di Holder si ha

$$\begin{aligned} v(x) &\leq n^{-2} C_n^{-2/n} \left[\int_{C_n |x|^n}^{\text{mis } \Omega} [f(t) t^{2/n}]^v \frac{dt}{t} \right]^{1/v} \left[\int_{C_n |x|^n}^{\text{mis } \Omega} \frac{dt}{t} \right]^{1-1/v} \leq \\ &\leq n^{-1-1/v} C_n^{-2/n} \|f\|_{n/2, v} \left[\lg \frac{r_0}{|x|} \right]^{1-1/v} \end{aligned}$$

da cui l'asserto.

OSSERVAZIONE I. La costante che compare nella (10) è la migliore possibile; con ciò intendiamo dire (si confronti in proposito l'introduzione di [6]) che $(n^{-1-1/v} C_n^{-2/n})$ è l'estremo superiore del rapporto $[u]_{1-1/v} / \|f\|_{n/2, v}$ al variare

(5) Per maggiori notizie su tali spazi rimandiamo a [1].

di $f(x)$ in $L(n/2, v)$, di L nella classe di operatori che verificano le (1) e dell'aperto Ω , con u soluzione del problema (2). Per verificare tale circostanza, detta $f_k(s)$ la funzione $s^{-2/n}$ troncata superiormente al valore k e $v_k(x)$ la soluzione del problema (3) con termine noto $f_k(C_n |x|^n)$, è sufficiente far vedere che il rapporto $[v_k]_{1-1/v}/\|f_k\|_{n/2, v}$ tende a $(n^{-1-1/v} C_n^{-2/n})$ al divergere di k .

2. Dal Teorema 1 si ricava che, se $f \in L(n/2, 1)$, la soluzione del problema (2) è limitata: dimostriamo che essa è continua almeno nei punti interni. Adottando le notazioni di [5], indichiamo con $I(x_0, \rho)$ la sfera di raggio ρ e centro x_0 e poniamo $\Omega(x_0, \rho) = \Omega \cap I(x_0, \rho)$. Sia x_0 interno a Ω : prendiamo ρ tale che $\Omega(x_0, 8\rho) = I(x_0, 8\rho)$. Poniamo $u = v + w$, essendo $v(x)$ la soluzione in $H_0^1(\Omega(x_0, 8\rho))$ dell'equazione $Lv = f$: che tale soluzione esista discende dalla coercitività della forma $a(\cdot, \cdot)$; si ha allora $Lw = 0$ in $\Omega(x_0, 8\rho)$ intendendo dire con questo (cfr. [5], Definition 1.3) che $a(w, \varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega(x_0, 8\rho))$. Indicata con $\omega(w, \rho)$ l'oscillazione della funzione $w(x)$ in $\Omega(x_0, \rho)$ si ha (cfr. [5] Lemma 7.3)

$$(11) \quad \omega(w, \rho) \leq \eta \omega(w, 4\rho)$$

essendo η una costante minore di 1. Inoltre per il Teorema 1 è

$$(12) \quad \omega(v, \rho) \leq 2 \sup_{\Omega(x_0, 8\rho)} |v| \leq 2 n^{-1-1/v} C_n^{-2/n} \|f\|_{n/2, 1}$$

dove con $\|f\|_{n/2, 1}$ si intende la norma in $L(n/2, 1)$ della restrizione della $f(x)$ al dominio $\Omega(x_0, 8\rho)$; la (12) diventa quindi

$$(13) \quad \omega(v, \rho) \leq F(\rho)$$

essendo $F(\rho)$ una funzione infinitesima al tendere di ρ a zero. Si ha quindi per le (11) e (13)

$$(14) \quad \omega(u, \rho) \leq \eta \omega(w, 4\rho) + F(\rho) \leq \eta \omega(u, 4\rho) + (\eta + 1) F(\rho).$$

Dalla (14) si ha $\lim_{\rho \rightarrow 0} \omega(u, \rho) \leq \eta \lim_{\rho \rightarrow 0} \omega(u, 4\rho)$, da cui, essendo $\eta < 1$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \omega(u, \rho) = 0$ e quindi l'asserto.

Possiamo pertanto enunciare il seguente risultato relativo ad una soluzione locale dell'equazione $Lu = f$, intendendo con tale locuzione una funzione $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ tale che

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

TEOREMA 2. *Sia $u(x)$ una soluzione locale dell'equazione $Lu = f$ con $f \in L(n/2, 1)$; allora $u(x)$ è continua in Ω .*

OSSERVAZIONE 2. Come nel più volte citato lavoro di Stampacchia si può giungere con la regolarizzazione fin sulla frontiera di Ω , facendo l'ulteriore ipotesi che Ω sia H_0^1 -ammissibile: basta tener presente che, in tale ipotesi, vale ancora la (11), anche se $x_0 \in \partial\Omega$ (cfr. [5], Lemma 7.4).

Se quindi Ω è H_0^1 -ammissibile l'operatore di Green G è lineare e continuo dallo spazio $L(n/2, 1)$ allo spazio $C_0^0(\overline{\Omega})$ e si ha

$$(15) \quad \max_{\overline{\Omega}} |G(f)| \leq n^{-2} C_n^{-2/n} \|f\|_{n/2,1}.$$

D'altra parte se $u(x)$ è soluzione di (4) si ha, per ogni ψ continua in $\overline{\Omega}$

$$\int_{\Omega} u\psi \, dx = \int_{\Omega} G(\psi) \, d\mu;$$

per la (15) si ha allora

$$\left| \int_{\Omega} u\psi \, dx \right| \leq n^{-2} C_n^{-2/n} \|\psi\|_{n/2,1} \int |d\mu|$$

e quindi, essendo $C^0(\overline{\Omega})$ denso in $L(n/2, 1)$ ⁽⁶⁾, il funzionale $\Phi(\psi) = \int u\psi \, dx$ è lineare e continuo su $L(n/2, 1)$; per il Lemma 1 $u(x)$ appartiene allo spazio $L_{\text{deb}}^{n/(n-2)}$ e, inoltre, è

$$(16) \quad |||u||| \leq n^{-2} C_n^{-2/n} \int |d\mu|.$$

Possiamo quindi enunciare il seguente

TEOREMA 3. *Se μ è una misura di Radon a variazione limitata, l'equazione $Lu = \mu$ ammette una soluzione $u(x)$ che appartiene allo spazio $L_{\text{deb}}^{n/(n-2)}$; vale inoltre la (16): la costante che vi compare è la migliore possibile.*

OSSERVAZIONE 3. Il Teorema 9.1 di [5] assicura che la soluzione dell'equazione $Lu = \mu$ e, quindi, in particolare dell'equazione $Lu = f$ con $f \in L^1$, appartiene allo spazio di Sobolev $H_0^{1,q}(\Omega)$ per ogni $q < n/(n-1)$; ciò implica che $u \in L^p$ per ogni $p < n/(n-2)$: il Teorema 3 precisa quindi, almeno per quel che riguarda il grado di sommabilità della $u(x)$, il risultato di Stampacchia.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. ALVINO (1977) - *Un caso limite della disuguaglianza di Sobolev in spazi di Lorentz*, « Rend. Acc. Sci. fis. mat., Napoli » (in corso di stampa).
- [2] G. G. LORENTZ (1950) - *Some new functional spaces*, « Ann. of Math. », 51, 37-55.
- [3] R. O'NEIL (1963) - *Convolution operators and $L(p, q)$ spaces*, « Duke Math. J. », 30, 129-142.
- [4] R. O'NEIL (1968) - *Integral transforms and tensor products on Orlicz spaces and $L(p, q)$ spaces*, « J. Analyse Math. », 21, 1-276.
- [5] G. STAMPACCHIA (1965) - *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre a coefficients discontinus*, « Ann. Inst. Fourier, Grenoble », 15, 189-258.
- [6] G. TALENTI (1976) - *Elliptic equations and rearrangements*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. », 3, 697-718.

(6) Per una dimostrazione di tale fatto si veda [2], Teorema 2.