Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alessandro Scarselli

SulleS-partizioni regolari di un gruppo finito

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.3, p. 300–304.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_3_300_0>

Algebra. — *Sulle S–partizioni regolari di un gruppo finito* (*). Nota di ALESSANDRO SCARSELLI, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — This Note concerns some questions about S-partitions of a finite group.

Nel lavoro ([6]), G. Zappa introduce il concetto di S–partizione di un gruppo ai fini di applicazioni di carattere geometrico. Se G è un gruppo e S un suo sottogruppo, una S–partizione di G è un insieme Π di sottogruppi di G, tale che per ogni elemento g di G non appartenente ad S, esiste esattamente un H in Π con $g \in \mathrm{SH}$.

Una S–partizione Π del gruppo G è detta:

(1) regolare se per ogni $x \in \mathrm{S}$ e $\mathrm{H} \in \Pi$, si ha $\mathrm{H}^x \in \Pi$;

(2) semistretta se $(|\mathrm{S}|, |\mathrm{H}|) = |\mathrm{S} \cap \mathrm{H}|$ per ogni $\mathrm{H} \in \Pi$;

(3) separata se $\mathrm{S} \cap \mathrm{H} = \langle 1 \rangle$ per ogni $\mathrm{H} \in \Pi$.

In un altro contesto R. Kochendörffer ([1]) introduce il concetto di sistema privilegiato di rappresentanti.

Se S è un sottogruppo del gruppo G e R è un sistema di rappresentanti per i laterali destri di S in G, si dice che R è «privilegiato» se per ogni $x \in \mathrm{S}$ si ha $\mathrm{R}^x = \mathrm{R}$.

Se S è un sottogruppo di Hall del gruppo G, l'esistenza di un sistema privilegiato di rappresentanti per i laterali destri di S in G, comporta, sotto opportune condizioni, l'esistenza di un complemento normale di S in G.

Il risultato più significativo in tale direzione è quello di M. Suzuki ([4]) (il cui enunciato è riportato nel corso della Nota), che utilizza teoria dei caratteri e che generalizza precedenti Teoremi di Zappa ([5]) e dello stesso Kochendörffer ([2]).

Nella presente Nota si studia il problema della determinazione dei gruppi finiti dotati di una S–partizione regolare semistretta e separata e, utilizzando il risultato citato di Suzuki, si ottiene il seguente

TEOREMA. *Sia* G *un gruppo finito e* Π *una* S–*partizione regolare semistretta e separata di* G, *allora, detto* π *l'insieme dei divisori primi dell'ordine di* S, S *è un* π–*sottogruppo di Hall di* G, *dotato di un* π–*complemento normale* N *e* Π *è una partizione di* N.

Tale risultato generalizza quelli di Zappa ([7]) e dell'Autore ([3]) ottenuti nell'ipotesi che G sia risolubile.

Nel corso della Nota indicheremo con G un gruppo che soddisfa le ipotesi del Teorema.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1977.

LEMMA 1. *Sia* T *un sottogruppo di* S *e* $sh \in N_G(T)$ *con* $s \in S$ *e* $h \in H \in \Pi$; *allora* $s \in N_S(T)$ *e* $h \in C_H(T)$.

Dimostrazione. Se $t \in T$, esiste un $t_1 \in T$ con $(t_1)^{sh} = t$ e quindi $t_1^s h = ht$ e $t^{-1} t_1^s h = h^t$.

Abbiamo dunque $h^t \in H^t \cap SH$.

Essendo Π una S-partizione regolare di G e $t \in S$, si ha $H^t \in \Pi$.

Perciò $SH^t \cap SH \subset S$ o $H = H^t$; nel primo caso $h^t = 1$, essendo h^t, al pari di h un π-elemento di G e S un π-gruppo, quindi $h = 1$ e dunque $s \in N_S(T)$ e $h \in C_H(T)$; nel secondo caso $h^t \in H$ e quindi $t^{-1} t_1^s = t^{-1} h t h^{-1} \in H \cap S = \langle 1 \rangle$ cioè $t_1^s = t$ e $hth^{-1} = t$.

Essendo t un arbitrario elemento di T, si conclude che $s \in N_S(T)$ e $h \in C_H(T)$.

Per ogni sottogruppo T di S, sia $\Pi_T = \{C_H(T)/H \in \Pi\}$.

LEMMA 2. *Se* $T \subset S$, Π_T *è una* $N_S(T)$-*partizione regolare di* $N_G(T)$.

Dimostrazione. Sia $g \in N_G(T) \setminus N_S(T)$, allora $g \notin S$ e quindi esiste esattamente un $H \in \Pi$ con $g \in SH$. Sia $g = sh$ con $s \in S$ e $h \in H$.

In base al Lemma 1, si ha $s \in N_S(T)$ e $h \in C_H(T)$, onde, essendo g un arbitrario elemento di $N_G(T)$, si ha

$$N_G(T) = \bigcup_{H \in \Pi} N_S(T)\, C_H(T) = \bigcup_{C \in \Pi_T} N_S(T)\, C .$$

Se $C_1 \in \Pi_T$, $C_2 \in \Pi_T$ e $C_1 \neq C_2$, si avrà $C_1 = C_{H_1}(T)$ e $C_2 = C_{H_2}(T)$ con $H_1, H_2 \in \Pi$ e $H_1 \neq H_2$; quindi

$$N_S(T)\, C_1 \cap N_S(T)\, C_2 \subset (SH_1 \cap SH_2) \cap N_G(T) \subset S \cap N_G(T) = N_S(T).$$

Se poi $s \in N_S(T)$ e $C \in \Pi_T$, si ha $C = C_H(T)$ con $H \in \Pi$.

Poiché Π è regolare e $s \in S$, si ha $H^s \in \Pi$ e dunque $C^s = (C_H(T))^s = C_{H^s}(T^s) = C_{H^s}(T) \in \Pi_T$. Si conclude che Π_T è una $N_S(T)$-partizione regolare di $N_G(T)$.

Se $x \in G$, poniamo $\Pi^x = \{H^x/H \in \Pi\}$.

LEMMA 3. *Sia* $x \in G$, Π^x *è una* S^x-*partizione regolare di* G.

Dimostrazione. Poiché $G = \bigcup_{H \in \Pi} SH$, risulta anche $G = \bigcup_{H \in \Pi} S^x H^x = \bigcup_{R \in \Pi^x} S^x R$.

Siano $R_1, R_2 \in \Pi^x$ con $R_1 \neq R_2$, esistono allora $H_1, H_2 \in \Pi$ con $R_1 = H_1^x$ e $R_2 = H_2^x$ ed essendo $R_1 \neq R_2$ è anche $H_1 \neq H_2$.

Perciò $SH_1 \cap SH_2 \subset S$, da cui $S^x H_1^x \cap S^x H_2^x \subset S^x$ e dunque $S^x R_1 \cap S^x R_2 \subset S^x$.

Se poi $R \in \Pi^x$, $H^x = R$ con $H \in \Pi$, $\bar{s} \in S^x$ e $\bar{s} = s^x$ con s in S, si ha $R^{\bar{s}} = (H^x)^{s^x} = (H^s)^x$; poiché Π è regolare è $H^s \in \Pi$ onde $R^{\bar{s}} \in \Pi^x$.

Dunque Π^x è una S^x-partizione regolare di G.

Sia U un sottogruppo normale di G contenuto in S, poniamo

$$\Pi_U^* = \{H^*/H^* = HU/U \text{ con } H \in \Pi\}, \qquad S^* = S/U \quad , \quad G^* = G/U.$$

LEMMA 4. *Sia* U *un sottogruppo normale di* G *contenuto in* S, *allora* Π_U^* *è una* S^**–partizione regolare di* G^*.

Dimostrazione. Poiché $G = \bigcup_{H \in \Pi} SH$, si ha $G^* = \bigcup_{H \in \Pi} S^* H^* = \bigcup_{V \in \Pi^*} S^* V$. Siano $V_1, V_2 \in \Pi^*$ con $V_1 \neq V_2$, allora esistono $H_1, H_2 \in \Pi$ con $V_1 = H_1^*$ e $V_2 = H_2^*$. Si ha $S^* H_1^* \cap S^* H_2^* \subset (SH_1 \cap SH_2) U/U \subset S^*$ essendo $H_1 \neq H_2$. Se $xU \in S^*$ e $V \in \Pi^*$, sia $V = H^*$ con $H \in \Pi$, allora $V^{xU} = (H^x)^* \in \Pi^*$.

LEMMA 5. *Sia* $R = \bigcup_{H \in \Pi} H$, *allora* R *è un sistema privilegiato di rappresentanti per i laterali destri di* S *in* G.

Dimostrazione. Siano $h_1, h_2 \in R$, allora esistono H_1 e $H_2 \in \Pi$ con $h_1 \in H_1$ e $h_2 \in H_2$; se $Sh_1 = Sh_2$ allora $Sh_1 = Sh_2 \subset SH_1 \cap SH_2$.
Se $H_1 = H_2$, si ha $h_1 h_2^{-1} \in S \cap H_1 = \langle 1 \rangle$ e quindi $h_1 = h_2$; in caso contrario si ha $SH_1 \cap SH_2 \subset S$ e quindi $Sh_1 = Sh_2 \subset S$, perciò $h_i \in H_i \cap S = \langle 1 \rangle$ $(i = 1, 2)$ onde $h_1 = h_2 = 1$. Si ha inoltre $SR = S \bigcup_{H \in \Pi} H = \bigcup_{H \in \Pi} SH = G$ e $R^x = R$ per ogni x in S onde R è un sistema privilegiato di rappresentanti per i laterali destri di S in G.

LEMMA 6. (Teorema di Suzuki). *Sia* G *un gruppo finito,* π *un insieme di numeri primi,* S *un* π*–sottogruppo di Hall di* G. *Allora* S *ha un complemento normale in* G, *se e solo se*:

(1) *Esiste un sistema privilegiato di rappresentanti per i laterali destri di* S *in* G

e

(2) *Ogni* π*–sottogruppo nilpotente di* G *è contenuto in qualche coniugato di* S *in* G.

LEMMA 7. Sia G un gruppo finito, π un insieme di numeri primi S un π–sottogruppo di Hall di G e N un complemento normale di S in G. Sia Π una S–partizione di G costituita da π–sottogruppi di G, allora Π è una partizione di N.

Dimostrazione. Sia $1 \neq x \in N$, allora $x \notin S$ e quindi esiste esattamente un $H \in \Pi$ con $x \in SH$. Essendo N un π'–sottogruppo di Hall normale di G, si ha $H \subset N$ e quindi se $x = sh$ con $s \in S$ e $h \in H$ è $s = 1$ cioè $x \in H$.
Sia ora G un minimo controesempio al Teorema; allora

(A) *Sia* p *un numero primo con* p *divisore di* $|S|$ *e* U *un* p*–sottogruppo normale di* G *con* $U \subset S$; *allora* $U = \langle 1 \rangle$

Si ha infatti, per il Lemma 4, che Π_U^* è una S^*–partizione regolare di G^* e, dunque, se $U \neq \langle 1 \rangle$, per la minimalità di G, si ottiene che S^* è un π–sottogruppo di Hall di G^* e G^* ha un π–complemento di Hall normale K^*. La retroimmagine K di K^* nell'omomorfismo naturale di G su G^* contiene ogni π'–elemento di G e U è un p–sottogruppo di Sylow di K, che risulta anche un π–sottogruppo di Hall di K. Si verifica allora che Π è una U–partizione regolare di K.

Dal Teorema di Suzuki (o da precedenti Teoremi di Zappa ([5]) segue che K ha un π–complemento di Hall normale N.

Chiaramente N è un π–complemento normale di Hall di G e quindi S è un π–sottogruppo di Hall di G. Essendo G un controesempio, si conclude che $U = \langle 1 \rangle$.

(B) S *è un π–sottogruppo di Hall di* G.

Sia infatti p un numero primo con p divisore di $|S|$ e P un p–sottogruppo di Sylow di S. Per (A) è $N_G(P) \neq G$, ed essendo G un minimo controesempio, come conseguenza del Lemma 2 si ha:

(*a*) $N_S(P)$ è un $\bar{\pi}$–sottogruppo di Hall di $N_G(P)$ con $\bar{\pi}$ insieme dei divisori primi di $|N_S(P)|$

e

(*b*) $N_G(P)$ ha un $\bar{\pi}$–complemento di Hall normale K.

Da (*a*) segue che P è un p–sottogruppo di Sylow di $N_G(P)$ e dunque anche un p–sottogruppo di Sylow di G. Se infatti P non fosse di Sylow in G, esisterebbe un p–sottogruppo $\bar{P}$ di G con $\bar{P} \supsetneqq P$.

Per una nota proprietà dei p–gruppi è $N_{\bar{P}}(P) \neq P$; ma $N_{\bar{P}}(P) \subset N_G(P)$ il che contraddice il fatto che P è un p–sottogruppo di Sylow di $N_G(P)$.

Si ha allora che per ogni primo p con p divisore di $|S|$, un p–sottogruppo di Sylow di S è un p–sottogruppo di Sylow di G e quindi S è un π–sottogruppo di Hall di G.

(C) *Sia* $\mathscr{T} = \{T/T$ *è un π–sottogruppo nilpotente di* G *e* $T \not\subset S^x$ *per alcun* $x \in G\}$, $\mathscr{T} \neq \varnothing$ *e se* $T \in \mathscr{T}$ *è* $T \cap S^x = \langle 1 \rangle$ *per ogni* $x \in G$.

Essendo G un controesempio, per il Teorema di Suzuki, è $\mathscr{T} \neq \varnothing$.

Sia $T \in \mathscr{T}$ con $T \cap S^y \neq \langle 1 \rangle$ per qualche $y \in G$ e sia $x \in G$ con $|T \cap S^x|$ massimale. Per (A), $N_G(T \cap S^x) \neq G$ e per il Lemma 2 e il Lemma 3, si ha che $N_G(T \cap S^x)$ ha la $N_{S^x}(T \cap S^x)$–partizione regolare $\Pi^x_{T \cap S^x}$ costituita dai $C_{H^x}(T \cap S^x)$. Dalla minimalità di G, segue allora che

(*a*) $N_{S^x}(T \cap S^x)$ è un $\bar{\pi}$–sottogruppo di Hall di $N_G(T \cap S^x)$ ove $\bar{\pi}$ è l'insieme dei divisori primi di $|N_{S^x}(T \cap S^x)|$

e

(*b*) $N_G(T \cap S^x)$ ha un $\bar{\pi}$–complemento di Hall normale K.

Per il Lemma 7, K è un π'–gruppo e dunque $N_{S^x}(T \cap S^x)$ è un π–sottogruppo di Hall di $N_G(T \cap S^x)$. Per il teorema di Suzuki ogni π–sottogruppo nilpotente di $N_G(T \cap S^x)$ è contenuto in un coniugato di $N_{S^x}(T \cap S^x)$ e quindi in un coniugato di S in G.

Poiché $T \in \mathscr{T}$ è $T \not\subset S^x$ e quindi $T \supsetneqq T \cap S^x$ ed essendo T nilpotente è $N_T(T \cap S^x) \supsetneqq T \cap S^x$. Sia $V = N_T(T \cap S^x)$, allora V è un π–sottogruppo nilpotente di $N_G(T \cap S^x)$ e quindi è contenuto in un coniugato S^y di S in G. Abbiamo allora $T \cap S^y \supset V \supsetneqq T \cap S^x$ e quindi $|T \cap S^y| > |T \cap S^x|$ il che contraddice la massimalità di $|T \cap S^x|$.

(D) Sia $T \in \mathscr{C}$ e p un divisore primo dell'ordine di T, allora esiste un elemento $t \in T$ con $t^p = 1 \neq t$ ed esisterà quindi un p–sottogruppo di Sylow P di G con $t \in P$. Poiché S è un π–sottogruppo di Hall di G (per (B)) e T è un π–sottogruppo di G, S contiene un coniugato P^y di P in G e quindi $t \in S^{y^{-1}}$ cioè $t \in T \cap S^{y^{-1}}$ il che contraddice (C).

BIBLIOGRAFIA

[1] R. KOCHENDÖRFFER (1959) – *Eine Satz über Sylowgruppen*, «Math. Nachr», *17*, 189–194.

[2] R. KOCHENDÖRFFER (1960) – *Hallgruppen mit ausgezeichnetem Repräesentesystem*, «Acta Sci. Math. Szeged», *21*, 218–223.

[3] A. SCARSELLI (1974) – *Generalizzazione di un teorema di Zappa sulle* S–*partizioni*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», *56*, 5–9.

[4] M. SUZUKI (1963) – *On the existence of a Hall normal subgroup*, «Journ. Math. Soc. Japan», *15*, 387–391.

[5] G. ZAPPA (1962) – *Sur les systèmes distingués de représentants et sur les compléments normaux des sous-groupes de Hall*, «Acta Math. Acad. Sci. Hung.», *13*, 227–230.

[6] G. ZAPPA (1964) – *Sugli spazi generali quasi di traslazione*, «Le Matematiche», *19*, 127–143.

[7] G. ZAPPA (1973) – *Partizioni generalizzate dei gruppi*, «Atti del Symposium sulla Matematica Combinatoria», Roma Acc. Naz. dei Lincei.