Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luigi Profera

Anelli ternari di Hestenes semplici e artiniani

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.3, p. 292–299.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_3_292_0>

Algebra. — *Anelli ternari di Hestenes semplici e artiniani.* Nota di LUIGI PROFERA, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — F. Bartolozzi and G. Panella [1] have classified simple *Artinian* Hestenes ternary rings without effective two-sided ideals. In this paper we classify simple *Artinian* Hestenes ternary rings with effective two-sided ideals.

F. Bartolozzi e G. Panella hanno classificato [1] gli *anelli ternari di* Hestenes (H–*anelli*) semplici, artiniani e privi di ideali bilateri effettivi.

Nella presente Nota completiamo la classificazione, nell'ordine di idee di [1], degli H–anelli semplici e artiniani. Proviamo, innanzitutto, che un H–anello A semplice, artiniano e con ideali bilateri effettivi possiede esattamente due ideali bilateri effettivi A_1 e A_2 e, a livello additivo, risulta $A = A_1 \oplus A_2$. Adoperando metodi introdotti in [1] proviamo, quindi, che se S, risp. D, è ideale sinistro, risp. destro, (non nullo e) minimale contenuto in A_1, risp. A_2, è possibile costruire un corpo k (non necessariamente commutativo) e fornire al gruppo additivo di S, risp. D, una struttura di k–spazio vettoriale (sinistro) finitamente generato W, risp. V, in modo che il gruppo additivo di A_1, risp. A_2, risulti isomorfo al gruppo additivo $\mathrm{Hom}_k(V, W)$, risp. $\mathrm{Hom}_k(W, V)$. In conseguenza stabiliamo un isomorfismo additivo $\alpha : A = A_1 \oplus A_2 \to \to \mathrm{Hom}_k(V, W) \oplus \mathrm{Hom}_k(W, V) = R$ e osserviamo che R acquista struttura di H–anello mediante l'applicazione $\omega : R \times R \times R \to R$ definita da $\omega((f_1, f_2), (g_1, g_2), (h_1, h_2)) = (h_1 g_2 f_1, f_2 g_1 h_2)$ se $f_1, g_1, h_1 \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, $f_2, g_2, h_2 \in \in \mathrm{Hom}_k(W, V)$, risultando $\alpha : A \to R$ un isomorfismo di H–anelli.

Per completezza proviamo che, se k è un corpo e se V e W sono k–spazi vettoriali (sinistri, non nulli e) finitamente generati, il gruppo additivo $R = \mathrm{Hom}_k(V, W) \oplus \mathrm{Hom}_k(W, V)$ acquista struttura di H–anello mediante l'applicazione $\omega : R \times R \times R \to R$ già precisata. Tale H–anello risulta semplice, artiniano e possiede ideali bilateri effettivi; essi (sono esattamente due e) hanno, come gruppo additivo, i due addendi, tra loro isomorfi, che individuano R per somma diretta.

Nelle nostre condizioni, se k ha dimensione finita sopra un sottocampo k' del suo centro, R ha struttura di k'–spazio vettoriale finitamente generato e l'applicazione $\omega : R \times R \times R \to R$ risulta k'–trilineare. Tali H–anelli R sono gli *assoziative Tripelsysteme* 2. *Art* classificati da O. Loos ([2]; Satz 4, (i)) ricorrendo all'« immersione standard » del loro k'–spazio vettoriale sostegno nello spazio vettoriale sostegno di una k'–algebra (binaria) associativa dotata di un antiautomorfismo involutorio e di dimensione finita sopra il corpo commutativo k'.

(*) Nella seduta del 12 marzo 1977.

1. Rinviando a [1] per i riferimenti bibliografici, richiamiamo qui soltanto le definizioni essenziali per rendere autonoma la presente esposizione.

Un *anello ternario di* Hestenes (H–*anello*) è un gruppo abeliano additivo A con un'applicazione triadditiva $\omega : A \times A \times A \rightarrow A$ per cui, posto $\omega(x, y, z) = xyz$ se $x, y, z \in A$, risulti $(xyz)uv = x(uzy)v = xy(zuv)$ se $x, y, z, u, v \in A$.

Sia A un H–anello. Se X, Y, Z sono parti (non vuote) di A, con $\langle XYZ \rangle$ indichiamo il sottogruppo del gruppo additivo di A generato da $XYZ = \{xyz \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\}$; poniamo $\sigma(X, Y) = \{z \in A \mid zXY = (0)\}$, $\mu(X, Y) = \{z \in A \mid XzY = (0)\}$, $\delta(X, Y) = \{z \in A \mid XYz = (0)\}$. Un sottogruppo G del gruppo additivo di A è *ideale sinistro* di A se $AAG \subseteq G$, è *ideale destro* di A se $GAA \subseteq G$, è *ideale bilatero* di A se è ideale sinistro e ideale destro di A, è *ideale* di A se è ideale bilatero di A e se $AGA \subseteq G$; inoltre, G è ideale *bilatero effettivo* di A se è ideale bilatero ma non è ideale di A. A è H–anello *semplice* se (0) e A sono i suoi unici ideali e se $AAA \neq (0)$. A è H–anello *artiniano* se si stabilizzano tutte le successioni decrescenti di ideali sinistri e tutte le successioni decrescenti di ideali destri.

2. In questo numero A è un H–anello semplice, artiniano e possedente ideali bilateri effettivi.

LEMMA 1. *Un ideale bilatero* B *di* A *è effettivo se e solo se* $(0) \neq B \neq A$.

Risulta $\langle AAA \rangle = A$.

Se B *è ideale bilatero effettivo di* A *risulta* $B + \langle ABA \rangle = A$ *con* $\langle ABA \rangle$ *ideale bilatero effettivo di* A *diverso da* B.

Dimostrazione. La semplicità di A comporta la prima affermazione in modo ovvio e la seconda perché $\langle AAA \rangle$ è ideale non nullo di A. Se B è ideale bilatero effettivo di A, $B + \langle ABA \rangle$ è ideale non nullo di A, perciò $B + \langle ABA \rangle = A$. $\langle ABA \rangle$ è ideale bilatero effettivo perché è ideale bilatero non nullo e se fosse $\langle ABA \rangle = A$ risulterebbe $(0) \neq A = \langle AAA \rangle = \langle A(ABA)A \rangle = \langle (AAB)AA \rangle \subseteq B$ che contraddice $B \neq A$.

Il Lemma è provato.

LEMMA 2. A *possiede esattamente due ideali bilateri effettivi* A_1 *e* A_2.

Risulta $A = A_1 \oplus A_2$ *a livello di gruppi additivi,* $\langle A_1 A_2 A_1 \rangle = A_1$ *e* $\langle A_2 A_1 A_2 \rangle = A_2$.

Se $a, b, c \in A$, $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $c = c_1 + c_2$ *con* $a_1, b_1, c_1 \in A_1$, $a_2, b_2, c_2 \in A_2$, *si ha:* $abc = a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_2$ *con* $a_1 b_2 c_1 \in A_1$, $a_2 b_1 c_2 \in A_2$.

Dimostrazione. La famiglia (non vuota) degli ideali bilateri effettivi di A, ordinata per inclusione, ammette elemento minimale perché A è artiniano; sia A_1 ideale bilatero effettivo di A minimale. Per il Lemma 1 è $A_1 + \langle AA_1A \rangle = A$ con $A_2 = \langle AA_1A \rangle$ ideale bilatero effettivo di A diverso da A_1. È $A_1 \cap A_2 = (0)$; infatti, $(0) \neq A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ comporterebbe $A_1 \cap A_2 = A_1$ per la minimalità di A_1 e da $A_1 \subseteq A_2$ seguirebbe $A = A_1 + A_2 = A_2$. Pertanto è $A = A_1 \oplus A_2$.

Se B è ideale bilatero effettivo di A minimale rispetto alla condizione $B \subseteq A_2$ (e, perciò, minimale in quanto ideale bilatero effettivo di A) risulta $A = B \oplus \oplus \langle ABA \rangle$ con $\langle ABA \rangle$ ideale bilatero effettivo di A, come già provato; inoltre, è $\langle ABA \rangle \subseteq \langle AA_2 A \rangle = \langle A(AA_1 A) A \rangle = \langle (AAA_1) AA \rangle \subseteq A_1$ e, per la minimalità di A_1, $\langle ABA \rangle = \langle AA_2 A \rangle = A_1$. Allora da $A = A_1 \oplus A_2 = A_1 \oplus B$ e $B \subseteq A_2$ segue $B = A_2$ e A_2 è ideale bilatero effettivo minimale.

Se B è ideale bilatero effettivo di A minimale, diverso da A_1 è $A = B \oplus \oplus \langle ABA \rangle$ con $\langle ABA \rangle$ ideale bilatero effettivo di A minimale. Inoltre, $A_1 AA_2 \subseteq \subseteq A_1 \cap A_2 = (0)$ e $A_2 AA_1 \subseteq A_1 \cap A_2 = (0)$ comportano $A_1 AA_2 = A_2 AA_1 = (0)$ e, a maggior ragione, $A_1 BA_2 = A_2 BA_1 = (0)$. In conseguenza è $ABA = = (A_1 + A_2) B (A_1 + A_2) = A_1 BA_1 + A_1 BA_2 + A_2 BA_1 + A_2 BA_2 \subseteq A_1 BA_1 + + \langle (AA_1 A) B (AA_1 A) \rangle \subseteq A_1 + \langle (AA_1 A)(A_1 AB) A \rangle = A_1$ (l'ultima uguaglianza segue da $A_1 AB \subseteq A_1 \cap B = (0)$) e, quindi, $\langle ABA \rangle = A_1$. Pertanto risulta $B = \langle A(ABA) A \rangle = \langle AA_1 A \rangle = A_2$ e A_1 e A_2 sono gli unici ideali bilateri effettivi di A minimali. Se, ora, B è ideale bilatero effettivo di A non minimale, si presenta una sola delle possibilità $A_1 \subset B$ [1], $A_2 \subset B$; infatti, $A_1 \subset B$ e $A_2 \subset B$ comporterebbero $A = A_1 + A_2 \subseteq B$. Se $A_2 \subset B$ esiste $x \in B - A_2$, è $x \neq 0$ e risulta $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, $x_1 \neq 0$ e $x_1 = x - x_2 \in B$. Allora è $B \cap A_1 \neq (0)$ e, per la minimalità di A_1, $B \cap A_1 = A_1$, cioè $A_1 \subset B$, assurdo. Abbiamo provato che A_1 e A_2 sono gli unici ideali bilateri effettivi di A.

Abbiamo già osservato che è $A_1 AA_2 = A_2 AA_1 = (0)$; in conseguenza è $A_1 A_1 A_2 = A_1 A_2 A_2 = A_2 A_1 A_1 = A_2 A_2 A_1 = (0)$. Inoltre, da $A = A_1 \oplus A_2$ segue $A_2 = \langle AA_1 A \rangle = \langle (A_1 + A_2) A_1 (A_1 + A_2) \rangle = \langle A_1 A_1 A_1 + A_1 A_1 A_2 + + A_2 A_1 A_1 + A_2 A_1 A_2 \rangle = \langle A_1 A_1 A_1 + A_2 A_1 A_2 \rangle = \langle A_1 A_1 A_1 \rangle + \langle A_2 A_1 A_2 \rangle$, $A_1 A_1 A_1 = (0)$ e $\langle A_2 A_1 A_2 \rangle = A_2$. Allo stesso modo si prova $A_2 A_2 A_2 = (0)$ e $\langle A_1 A_2 A_1 \rangle = A_1$. L'ultima affermazione del Lemma ne segue facilmente. Il Lemma è provato.

Per il seguito siano S ideale sinistro minimale di A contenuto in A_1, D ideale destro minimale di A contenuto in A_2.

Con tali dati proveremo che è possibile costruire un opportuno H-anello R isomorfo ad A; useremo metodi e tecniche dimostrative di [1] tenendo presente la diversità del nostro caso.

LEMMA 3. *Esistono* $s \in S$, $d \in D$ *tali che* $xds = x$ *se* $x \in S$, $dsy = y$ *se* $y \in D$.

Dimostrazione. Se $SDS = (0)$ è $S \subseteq \sigma(D, S)$ con $\sigma(D, S)$ ideale bilatero di A, quindi $A_1 \subseteq \sigma(D, S)$, cioè $A_1 DS = (0)$. Da $A_1 DS = (0)$ segue $D \subseteq \mu(A_1, S)$ con $\mu(A_1, S)$ ideale bilatero di A, quindi $A_2 \subseteq \mu(A_1, S)$, cioè $A_1 A_2 S = (0)$. Da $A_1 A_2 S = (0)$ segue $S \subseteq \delta(A_1, A_2)$ con $\delta(A_1, A_2) = A_2$ perché $\delta(A_1, A_2)$ è ideale bilatero di A, $A_2 \subseteq \delta(A_1, A_2)$ e non è $(0) = A_1 A_2 A = = A_1 A_2 A_1$ (Lemma 2). Pertanto risulta $S \subseteq A_1 \cap A_2 = (0)$, assurdo. Abbiamo

(1) Col simbolo $\subset$ indichiamo l'inclusione propria.

provato che è $SDS \neq (0)$; perciò esistono $s' \in S$, $d' \in D$ $(s' \neq 0 \neq d')$ tali che $(0) \neq Sd's' \subseteq S$ e, poiché $Sd's'$ è ideale sinistro di A, risulta $Sd's' = S$ per la minimalità di S. Sia $s \in S$ con $sd's' = s'$. Risulta $0 \neq s' = sd's' = sd'(sd's') = s(d'sd')s'$ e, perciò, $d'sd' \neq 0$ e $(0) \neq d'sD \subseteq D$ con $d'sD$ ideale destro di A; pertanto $d'sD = D$ per la minimalità di D. Esiste, quindi, $d \in D$ tale che $d'sd = d'$. È $0 \neq d'sd = (d'sd)sd = d'(sds)d = d's(dsd)$ e, perciò, $sds \neq 0$ e $dsd \neq 0$. Allora $Sds = S$ e $dsD = D$. Da $d'sd = d'$ e $d'sd = d's(dsd)$ segue $d's(dsd - d) = 0$, $\{z \in D \mid d'sz = 0\}$ è ideale destro di A contenuto propriamente in D, allora è l'ideale nullo e, perciò, $dsd = d$. Da $Sds = S$ segue che se $x' \in S$ esiste $x \in S$ tale che $xds = x'$; allora $xds = x(dsd)s = (xds)ds = x'ds$ e $(x - x')ds = 0$. $\{z \in S \mid zds = 0\}$ è ideale sinistro di A contenuto propriamente in S, allora è l'ideale nullo e, perciò, $x' = x$. Abbiamo provato che $xds = x$ se $x \in S$. Analogamente $dsy = y$ se $y \in D$.

Il Lemma è provato.

LEMMA 4. *Risulta* $dxA_2 = dxA = D$ *se* $x \in S$, $x \neq 0$, $A_1 ys = Ays = S$ *se* $y \in D$, $y \neq 0$; $\delta(d, S) = A_1$, $\sigma(D, s) = A_2$ (2).

Dimostrazione. Se $x \in S$, $x \neq 0$, $dxA_2 = dxA$ è ideale destro di A contenuto in D e risulta $dxA = D$; infatti è $dxA \neq (0)$ perché $\{z \in S \mid dzA = (0)\}$ è ideale sinistro di A contenuto propriamente in S $(dsd \neq 0)$ e, perciò, è l'ideale nullo. Analogamente $A_1 ys = Ays = S$ se $y \in D$, $y \neq 0$. $\delta(d, S) = \{z \in A \mid dSz = (0)\}$ è ideale bilatero di A diverso da A perchè $dSA \neq (0)$; inoltre, $dSA_1 \subseteq A_2 A_1 A_1 = (0)$, quindi $dSA_1 = (0)$ e $\delta(d, S) = A_1$. Analogamente $\sigma(D, s) = A_2$.

Il Lemma è provato.

LEMMA 5. *Il gruppo additivo di* A *acquista struttura di anello associativo*, $A(+, \circ)$, *con la moltiplicazione definita da* $a \circ b = asb$ *se* $a, b \in A$.

$A_1(+, \circ)$, $A_2(+, \circ)$, $D(+, \circ)$ *e* $k(+, \circ)$, *con* $k = D \circ d = Dsd$, *sono sottoanelli di* $A(+, \circ)$. $D(+, \circ)$ *ha* d *come identità sinistra*, $k(+, \circ)$ *è corpo che ha* d *come identità*.

Dimostrazione. Proviamo soltanto che se $z \in k$, $z \neq 0$, esiste $z' \in k$ tale che $z \circ z' = d$. $z \circ D = zsD$ è ideale destro di A contenuto in D. Risulta $z \circ D \neq (0)$ perché $z = y \circ d = ysd$, con $y \in D$, comporta $z \circ d = (ysd)sd = y(sds)d = ysd = z$ (Lemma 3); quindi $z \circ D = D$. Se $y \in D$ è tale che $z \circ y = d$ *risulta* $z \circ (y \circ d) = (z \circ y) \circ d = d \circ d = d$ e $z \circ z' = d$ con $z' = y \circ d \in k$.

Il Lemma è provato.

LEMMA 6. *Il gruppo additivo di* S, *risp.* D, *acquista struttura di k–spazio vettoriale sinistro con l'applicazione* $k \times S \to S$ *definita da* $(t, x) \to xts$ *se* $t \in k$,

(2) Osserviamo che la coppia (S, D) dei gruppi additivi di S e D, con le applicazioni $S \times A \to D$, $(x, a) \to dxa$ se $x \in S$, $a \in A$ e $A \times D \to S$, $(a, y) \to ays$ se $a \in A$, $y \in D$, ha struttura di A–modulo secondo la definizione di R. A. Stephenson [3]. Il Lemma 4 assicura che S, D) è A–modulo irriducibile ma non fedele (cfr. [3] per le definizioni).

$x \in S$, *risp.* $k \times D \to D$ *definita da* $(t, y) \to t \circ y = tsy$ *se* $t \in k$, $y \in D$.
I k–spazi vettoriali sinistri S *e* D *sono finitamente generati.*

Dimostrazione. Proviamo soltanto che è assurda l'ipotesi che $\{v_i\}_{i \in N}$ è parte libera numerabile del k-spazio vettoriale sinistro D. Se $i \in N$ è $A_2 A_1 v_i \neq (0)$ perché $A_2 A_1 v_i = (0)$ comporta $v_i \in \delta(A_2, A_1) = A_1$ e, quindi, $v_i \in A_1 \cap A_2 = (0)$. Allora, per ogni $i \in N$, esiste $a_i \in A_1$ tale che $A_2 a_i v_i \neq (0)$ essendo $A_2 a_i v_i$ ideale sinistro di A contenuto in A_2. $\underset{i \in N}{+} A_2 a_i v_i$ (a livello di gruppi additivi) non è diretta perché A è artiniano; perciò esiste $\sum_{r=1}^{t} s_r a_r v_r = 0$ con $s_r \in A_2$ e, com'è lecito supporre, $s_1 a_1 v_1 \neq 0$. Allora è $0 \neq s_1 a_1 v_1 = s_1 a_1 (dsv_1) = (s_1 a_1 d) \circ v_1$ e, quindi, $z = s_1 a_1 d \neq 0$ con $z \in A_2$. Risulta $DA_1 z \neq (0)$ perché $DA_1 z = (0)$ comporta $z \in \delta(D, A_1) = A_1$ e, quindi, $z \in A_1 \cap A_2 = (0)$. Siano $d_1 \in D$, $b_1 \in A_1$ tali che $k_1 = d_1 b_1 z = d_1 b_1 (s_1 a_1 d) = d_1 (a_1 s_1 b_1) d \neq 0$. Se $k_r = d_1 b_1 (s_r a_r d) = d_1 (a_r s_r b_1) d$ è $k_r = k_r \circ d \in D \circ d = k$. Pertanto risulta $0 = \sum_{r=1}^{t} s_r a_r v_r = \sum_{r=1}^{t} (s_r a_r d) \circ v_r = d_1 b_1 \left(\sum_{r=1}^{t} (s_r a_r d) \circ v_r \right) = \sum_{r=1}^{t} (d_1 b_1 (s_r a_r d)) \circ v_r = \sum_{r=1}^{t} k_r \circ v_r$ con $k_1 \neq 0$ e l'ipotesi che $\{v_i\}_{i \in N}$ è parte libera di D è assurda.

Il Lemma è provato.

LEMMA 7. *Se* $a_1 \in A_1$, *risp.* $a_2 \in A_2$, *ponendo* $y[a_1] = a_1 ys$ *se* $y \in D$, *risp.* $x[a_2] = dxa_2$ *se* $x \in S$, *si definisce un'applicazione* $[a_1]: D \to S$, *risp.* $[a_2]: S \to D$ *che è k–lineare* (3).

Ponendo $\rho(a_1) = [a_1]$ *se* $a_1 \in A_1$, *risp.* $\tau(a_2) = [a_2]$ *se* $a_2 \in A_2$, *si definisce un isomorfismo additivo* $\rho: A_1 \to \mathrm{Hom}_k(D, S)$, *risp.* $\tau: A_2 \to \mathrm{Hom}_k(S, D)$.

Dimostrazione. Proviamo il Lemma soltanto per τ. Se $a \in A_2$ si verifica che $[a] \in \mathrm{Hom}_k(S, D)$. Se $a, b \in A_2$ e $x \in S$ è $x[a+b] = dx(a+b) = dxa + dxb = x[a] + x[b]$, quindi τ è omomorfismo additivo. È $\mathrm{Ker}\,\tau = \{a \in A_2 \mid S[a] = (0)\} = \{a \in A_2 \mid dSa = (0)\} = \delta(d, S) \cap A_2 = A_1 \cap A_2 = (0)$ (Lemma 4), quindi τ è monomorfismo.

Proviamo che se V è sottospazio proprio di S e se $x \in S - V$ esiste $a \in A_2$ tale che $V[a] = (0)$ e $x[a] \neq 0$. Ragioniamo per induzione su $\dim_k V$ (Lemma 6). Se $V = (0)$ e $x \neq 0$ è $\{x[a] \mid a \in A_2\} = dxA_2 = dxA = D$ (Lemma 4) e l'asserto è provato. Sia $\dim_k V = t \geq 1$, $x \in S - V$ e supponiamo la tesi vera per ogni sottospazio di S la cui dimensione è minore di t; ci proponiamo di raggiungere un assurdo negando la tesi per V e x. Sia $V = V_{t-1} \oplus V_1$ con V_{t-1} e V_1 sottospazi di S di dimensione $t-1$ e 1 rispettivamente; inoltre sia $v \in V_1$, $v \neq 0$. Per ipotesi induttiva esiste $a_2 \in A_2$ tale che $v[a_2] \neq 0$ e $V_{t-1}[a_2] = (0)$. $\Delta = \{a \in A_2 \mid V_{t-1}[a] = (0)\}$ è ideale destro di A e risulta

(3) Se V e W sono spazi vettoriali sinistri su un corpo C e se $f: V \to W$ è applicazione C–lineare, indichiamo con xf l'immagine di $x \in V$ mediante f. Così, se $f, h \in \mathrm{Hom}_C(V, W)$ e $g \in \mathrm{Hom}_C(W, V)$, $fgh \in \mathrm{Hom}_C(V, W)$ è definita da $x(fgh) = ((xf)g)h$ se $x \in V$.

$(0) \neq \{v[a] \mid a \in \Delta\} = dv\,\Delta \subseteq \mathrm{D}$, quindi $dv\,\Delta = \mathrm{D}$. Se $y \in \mathrm{D}$, $y = dva = v[a]$ con $a \in \Delta$, ponendo $h(y) = h(v[a]) = x[a]$ si definisce un'applicazione $h : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$; infatti, $v[a] = v[b]$, con $a, b \in \Delta$, comporta $\mathrm{V}[a - b] = (0)$ e, avendo negato la tesi per V e x, $x[a - b] = 0$, cioè $x[a] = x[b]$. Se $y \in \mathrm{D}$ e $b, c \in \mathrm{A}$ risulta $h(ybc) = h(y)\,bc$; infatti, se $y = dva$ con $a \in \Delta$ $(\mathrm{D} = dv\,\Delta)$, risulta $h(ybc) = h((dva)\,bc) = h(dv(abc)) = h(v[abc]) = x[abc] = dx(abc) = (dxa)\,bc = (x[a])\,bc = h(y)\,bc$. Se $b = s$ e $c = d$ risulta $h(y \circ d) = h(y) \circ d$ e, perciò, $h(k) = h(\mathrm{D} \circ d) = h(\mathrm{D}) \circ d \subseteq \mathrm{D} \circ d = k$. Se $y = d$, $b = s$ e $c \in \mathrm{D}$ risulta $h(c) = h(d) \circ c = k' \circ c$ con $k' = h(d) \in k$. Allora, se $a \in \Delta$, risulta $(vk's - x)[a] = (vk's)[a] - x[a] = k' \circ (v[a]) - x[a] = h(v[a]) - x[a] = x[a] - x[a] = 0$. Quindi è $vk's - x \in \mathrm{V}_{t-1}$ e, siccome $vk's \in \mathrm{V}_1$, risulta $x \in \mathrm{V}$, assurdo.

Siano $\mathrm{X} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ una base del k–spazio vettoriale S e $\mathrm{Y} = \{y_1, \cdots, y_n\}$ una famiglia di vettori di D. Sia U_i il sottospazio di S generato da $\mathrm{X} - \{x_i\}$ $(i \in \{1, \cdots, n\})$. $\Delta_i = \{a \in \mathrm{A}_2 \mid \mathrm{U}_i[a] = (0)\}$ è ideale destro di A e, come già provato, risulta $(0) \neq \{x_i[a] \mid a \in \Delta_i\} = dx_i\,\Delta_i \subseteq \mathrm{D}$; quindi $dx_i\,\Delta_i = \mathrm{D}$. Allora esiste $a_i \in \Delta_i$ tale che $x_i[a_i] = y_i$. Posto $a = a_1 + \cdots + a_n$, risulta $x_i[a] = x_i[a_i] = y_i$ se $i \in \{1, \cdots, n\}$; quindi τ è epimorfismo.

Il Lemma è provato.

COROLLARIO 1. *I gruppi additivi di* A_1 *e di* A_2 *sono isomorfi.*

Dimostrazione. Per il Lemma 7 basta provare che sono isomorfi i gruppi additivi $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{D}, \mathrm{S})$ e $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{S}, \mathrm{D})$. Fissata una base $\{x_1, \cdots, x_n\}$, risp. $\{y_1, \cdots, y_m\}$, del k–spazio vettoriale sinistro S, risp. D, $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{D}, \mathrm{S})$, risp. $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{S}, \mathrm{D})$, è isomorfo al gruppo additivo $k_{m,n}$, risp. $k_{n,m}$, delle matrici $m \times n$, risp. $n \times m$, a elementi in k. Associando a ogni matrice di $k_{m,n}$ la sua trasposta si definisce un isomorfismo additivo tra $k_{m,n}$ e $k_{n,m}$ e, perciò, è individuato un isomorfismo additivo tra $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{D}, \mathrm{S})$ e $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{S}, \mathrm{D})$.

TEOREMA 1. *Sia* A *un* H*–anello semplice, artiniano e con ideali bilateri effettivi.*

A *possiede esattamente due ideali bilateri effettivi,* A_1 *e* A_2, *e risulta* $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_2$ *a livello di gruppi additivi.*

Se S, *risp.* D, *è ideale sinistro, risp. destro, minimale di* A *contenuto in* A_1, *risp.* A_2, *è possibile costruire un corpo* k *e fornire al gruppo additivo di* S, *risp.* D, *una struttura di* k*–spazio vettoriale sinistro finitamente generato* W, *risp.* V, *in modo che il gruppo additivo di* A_1, *risp.* A_2, *risulti isomorfo al gruppo additivo* $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}, \mathrm{W})$, *risp.* $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{W}, \mathrm{V})$.

Il gruppo additivo $\mathrm{R} = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}, \mathrm{W}) \oplus \mathrm{Hom}_k(\mathrm{W}, \mathrm{V})$ *acquista struttura di* H*–anello mediante l'applicazione* $\omega : \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ *definita da* $\omega((f_1, f_2), (g_1, g_2), (h_1, h_2)) = (h_1 g_2 f_1, f_2 g_1 h_2)$ *se* $f_1, g_1, h_1 \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}, \mathrm{W})$, $f_2, g_2, h_2 \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{W}, \mathrm{V})$. *Gli* H*–anelli* A *ed* R *sono isomorfi.*

Dimostrazione. A possiede esattamente due ideali bilateri effettivi, A_1 e A_2, e risulta $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_2$ a livello di gruppi additivi (Lemma 2). Esistono $s \in \mathrm{S}$, $d \in \mathrm{D}$ tali che $xds = x$ se $x \in \mathrm{S}$, $dsy = y$ se $y \in \mathrm{D}$ (Lemma 3). $k = \mathrm{D}sd \subseteq \mathrm{D}$

è sottogruppo del gruppo additivo di D e acquista struttura di corpo con la moltiplicazione definita da $a \circ b = asb$ se $a, b \in k$; l'identità di k è d (Lemma 5). Il gruppo additivo di S, risp. D, acquista struttura di k–spazio vettoriale sinistro finitamente generato W, risp. V, con l'applicazione $k \times S \to S$ definita da $(t, x) \to xts$ se $t \in k, x \in S$, risp. $k \times D \to D$ definita da $(t, y) \to tsy$ se $t \in k, y \in D$ (Lemma 6). Se $a_1 \in A_1$, risp. $a_2 \in A_2$, l'applicazione $[a_1] : V \to W$ definita da $y[a_1] = a_1 ys$ se $y \in V$, risp. $[a_2] : W \to V$ definita da $x[a_2] = dxa_2$ se $x \in W$, è k–lineare. L'applicazione $\rho : A_1 \to \mathrm{Hom}_k(V, W)$ definita da $\rho(a_1) = [a_1]$ se $a_1 \in A_1$, risp. $\tau : A_2 \to \mathrm{Hom}_k(W, V)$ definita da $\tau(a_2) = [a_2]$ se $a_2 \in A_2$, è un isomorfismo additivo (Lemma 7).

Allora, se $a \in A = A_1 \oplus A_2$, $a = a_1 + a_2$ con $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ponendo $\alpha(a) = (\rho(a_1), \tau(a_2)) = ([a_1], [a_2])$, si definisce un isomorfismo additivo $\alpha : A = A_1 \oplus A_2 \to \mathrm{Hom}_k(V, W) \oplus \mathrm{Hom}_k(W, V) = R$. Trasportando ad R mediante α l'applicazione triadditiva $A \times A \times A \to A$ che compete ad A in quanto H–anello, si ottiene l'applicazione $\omega : R \times R \times R \to R$ dell'enunciato del Teorema; si deve tener presente che, se $a, b, c \in A$, $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $c = c_1 + c_2$ con $a_1, b_1, c_1 \in A_1$, $a_2, b_2, c_2 \in A_2$, è $\rho(a_1 b_2 c_1) = \rho(c_1) \tau(b_2) \rho(a_1)$ e $\tau(a_2 b_1 c_2) = \tau(a_2) \rho(b_1) \tau(c_2)$. Così l'applicazione $\omega : R \times R \times R \to R$ rende il gruppo additivo R un H–anello isomorfo all'H–anello A mediante α.

Il Teorema è provato.

3. Concludiamo col seguente Teorema:

TEOREMA 2. *Siano k un corpo (non necessariamente commutativo),* V *e* W *k–spazi vettoriali sinistri (non nulli e) finitamente generati.*

Il gruppo additivo $R = \mathrm{Hom}_k(V, W) \oplus \mathrm{Hom}_k(W, V)$ *acquista struttura di* H*–anello mediante l'applicazione* $\omega : R \times R \times R \to R$ *definita da* $\omega((f_1, f_2), (g_1, g_2), (h_1, h_2)) = (h_1 g_2 f_1, f_2 g_1 h_2)$ *se* $f_1, g_1, h_1 \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, $f_2, g_2, h_2 \in \mathrm{Hom}_k(W, V)$. *Tale* H*–anello è semplice e artiniano;* $R_1 = \{(f_1, 0) \mid f_1 \in \mathrm{Hom}_k(V, W)\}$ *ed* $R_2 = \{(0, f_2) \mid f_2 \in \mathrm{Hom}_k(W, V)\}$ *sono i suoi ideali bilateri effetivi.*

Dimostrazione. Verificato che R è H–anello, proviamo che, se D è ideale destro di R, esistono T ed U, sottospazi di W, tali che $D = \{(f_1, f_2) \in R \mid Vf_1 \subseteq T, Uf_2 = (0)\}$. Se $(f_1, f_2) \in R$ risulta $(f_1, f_2) \in D$ se e solo se $(f_1, 0), (0, f_2) \in D$ poiché, come proveremo, se $(f_1, f_2) \in D$ è $(f_1, 0) \in D$. Perciò sia V_1 un sottospazio di V supplementare del nucleo $\mathrm{Ker} f_1$ di $f_1 : V = V_1 \oplus \mathrm{Ker} f_1$. Essendo la restrizione di f_1 a V_1 iniettiva, ha senso considerare un'applicazione lineare $g_2 : W \to V$ tale che $(vf_1) g_2 = v$ se $v \in V_1$ e si ha $((vf_1) g_2) f_1 = vf_1$, cioè $v(f_1 g_2 f_1) = vf_1$ e, risultando $V = V_1 \oplus \mathrm{Ker} f_1$, $f_1 g_2 f_1 = f_1$. Allora è $(f_1, 0) = (f_1 g_2 f_1, 0) = \omega((f_1, f_2), (0, g_2), (f_1, f_2)) \in D$. Se $D_1 = D \cap R_1$ e $D_2 = D \cap R_2$, risulta $D = D_1 \oplus D_2$. Da $\omega(D_1 \times R \times R) = \omega(D_1 \times R_2 \times R_1) \subseteq D_1$ segue ([1]; Lemma 1) $D_1 = \{(f_1, 0) \in R \mid Vf_1 \subseteq T\}$ con $T = + Vf_1$, la somma essendo estesa alle applicazioni lineari $f_1 : V \to W$ tali che $(f_1, 0) \in D_1$; analogamente, da $\omega(D_2 \times R \times R) = \omega(D_2 \times R_1 \times R_2) \subseteq D_2$ segue $D_2 = \{(o, f_2) \in R \mid U f_2 = (o)\}$ con $U = \cap \operatorname{Ker} f_2$, l'intersezione essendo estesa alle applicazioni lineari $f_2 : W \to V$ tali che $(o, f_2) \in D$. Se $D = \{(f_1, f_2) \in R \mid V f_1 \subseteq T, U f_2 = (o)\}$ e $D' = \{(f_1, f_2) \in R \mid V f_1 \subseteq T', U' f_2 = (o)\}$ sono ideali destri dell'H–anello R (T, U, T' e U' sono sottospazi di W) risulta $D \subseteq D'$ se e solo se $T \subseteq T'$ e $U' \subseteq U$ avendosi $D = D'$ se e solo se $T = T'$ e $U = U'$. Poiché W è finitamente generato, ogni successione decrescente di ideali destri dell'H–anello R si stabilizza. Allo stesso modo si prova che se S è ideale sinistro dell'H–anello R risulta $S = \{(f_1, f_2) \in R \mid H f_1 = (o), W f_2 \subseteq K\}$ con H e K sottospazi opportuni di V; la finitezza della dimensione di V assicura che ogni successione decrescente di ideali sinistri dell'H–anello R si stabilizza. Pertanto R è H–anello artiniano.

Infine, se E è ideale bilatero dell'H–anello R, risulta $E = \{(f_1, f_2) \in R \mid V f_1 \subseteq T, U f_2 = (o)\} = \{(f_1, f_2) \in R \mid H f_1 = (o), W f_2 \subseteq K\}$ con T, U, risp. H, K, sottospazi opportuni di W, risp. V. Da ciò segue per E una delle possibilità: $E = \{(o, o)\}$, $E = R_1$, $E = R_2$, $E = R$. R_1 ed R_2 sono ideali bilateri effettivi dell'H–anello R, risulta $\omega(R \times R \times R) \neq \{(o, o)\}$, perciò R è H–anello semplice.

Il Teorema è provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. BARTOLOZZI e G. PANELLA – *Anelli ternari di Hestenes semplici, artiniani e privi di ideali bilateri effettivi*, « Ricerche Mat. » (in corso di stampa).

[2] O. LOOS (1972) – *Assoziative Tripelsysteme*, «Manuscripta Math.», 7, 103–112.

[3] R. A. STEPHENSON (1973) – *Jacobson structure theory for Hestenes ternary rings*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *177*, 91–98.