Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Umberto Bartocci, Giuseppe De Cecco

Generalizzazione del concetto di traccia di un endomorfismo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.3, p. 275–282.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_3_275_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 marzo 1977

Presiede il Presidente della Classe BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Generalizzazione del concetto di traccia di un endomorfismo.* Nota II (*) di UMBERTO BARTOCCI e GIUSEPPE DE CECCO, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Cf. the Summary of Note I, appeared in the previous issue of these « Rendiconti » at p. 115.

III. CONFRONTO FRA LE VARIE DEFINIZIONI DI TRACCIA

1. Facciamo vedere ora come la definizione generale di traccia data nel § II estenda tutte le definizioni indicate nel § I, e studiamo altresì più a fondo queste ultime.

Cominciamo dallo studio della categoria (propriamente ammissibile!) $\mathcal{F}$.

(1.1) TEOREMA. *Dato* $M \in Ob\,\mathcal{F}$, *sia* $\theta_M : M \to M$ *l'omotetia di rapporto* x *in* M. *Allora l'applicazione* $T : K_0(\mathcal{F}) \to F$ *definita dalla* $[M] \to \mathrm{Tr}(\theta_M)$, *ove* Tr *designa la traccia ordinaria, è un omomorfismo (non nullo) di* F*-gruppi coincidente con l'unica traccia normalizzata su* $\mathcal{F}$. *Tutte le altre tracce su* $\mathcal{F}$ *si ottengono come multipli a coefficienti in* F *e non nulli dell'omomorfismo* T.

(1.2) COROLLARIO. *La dimensione del vettorializzato* $\overline{K_0(\mathcal{F})}$ *di* $K_0(\mathcal{F})$ *è uguale ad* 1 *ed una base di* $\overline{K_0(\mathcal{F})}$ *è fornita dalla classe* $[A/(x-1)A]$.

(*) Questa Nota II è la continuazione della Nota I con lo stesso titolo, apparsa alle pp. 115–121 del precedente fascicolo di questi « Rendiconti », alla fine della quale trovasi la Bibliografia.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1977.

Dimostrazione. È chiaro che nel modo indicato si ottiene una traccia normalizzata su $\mathscr{F}$. Viceversa, detta T una qualunque traccia su $\mathscr{F}$, si ponga $a_0 = \mathrm{T}([\mathrm{A}/(x-1)\mathrm{A}])$. Allora, se $\dim_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) = 1$, risulta chiaramente $[\mathrm{M}] = a \cdot [\mathrm{A}/(x-1)\mathrm{A}]$, ove $a \in \mathrm{F}$ è l'unico autovalore di θ_{M}, sicché $\mathrm{T}([\mathrm{M}]) = a a_0 = a_0 \operatorname{Tr}(\theta_{\mathrm{M}})$. Dimostriamo ora che l'identità precedente sussiste per ogni valore di $n = \dim_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) > 1$ (e quindi è certamente anche $a_0 \neq 0$). Si procede per induzione su n. Sia a un autovalore di θ_{M}, e sia M′ un sottospazio unidimensionale di M generato da un a–autovettore. Dalla considerazione della successione esatta $0 \to \mathrm{M}' \to \mathrm{M} \to \mathrm{M}/\mathrm{M}' \to 0$ (ove il primo morfismo è l'inclusione ed il secondo la proiezione canonica) segue $\mathrm{T}([\mathrm{M}]) = \mathrm{T}([\mathrm{M}']) + \mathrm{T}([\mathrm{M}/\mathrm{M}']) = a_0 \operatorname{Tr}(\theta_{\mathrm{M}'}) + a_0 \operatorname{Tr}(\theta_{\mathrm{M}/\mathrm{M}'}) = a_0(\operatorname{Tr}(\theta_{\mathrm{M}'}) + \operatorname{Tr}(\theta_{\mathrm{M}/\mathrm{M}'})) = a_0 \operatorname{Tr}(\theta_{\mathrm{M}})$, come volevasi dimostrare (invero risulta $\dim_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}/\mathrm{M}') = n-1$ e scatta l'induzione).

Il Corollario è immediata conseguenza del Teorema. Esso può essere dimostrato anche con un calcolo diretto [14], osservando che il gruppo $\mathrm{K}_0(\mathscr{F})$ coincide con il gruppo abeliano libero generato dagli elementi di F (basta usare la teoria della riduzione a forma canonica classica di una matrice quadrata ad elementi in F), e che un isomorfismo tra $\overline{\mathrm{K}_0(\mathscr{F})}$ ed F resta indotto dall'omomorfismo che associa ad un elemento $\sum_i (a_i, n_i)$ $(a_i \in \mathrm{F}, n_i \in \mathbf{Z})$ di $\mathrm{K}_0(\mathscr{F})$ l'elemento $\sum_i n_i a_i$ in F.

2. Passiamo ora alla considerazione della categoria $\mathscr{F}^1$ corrispondente agli endomorfismi di rango finito. È immediato constatare che la categoria $\mathscr{F}^1$ *non* è ammissibile; tuttavia è possibile *completare* $\mathscr{F}^1$ in una categoria $\hat{\mathscr{F}}$ che risulti ammissibile con il seguente procedimento generale. Poiché l'intersezione di due categorie ammissibili è una categoria ammissibile, basta prendere come $\hat{\mathscr{F}}$ la minima categoria ammissibile contenente $\mathscr{F}^1$. È immediato verificare che essa si ottiene come limite diretto delle categorie $\mathscr{F}^1 \hookrightarrow \mathscr{F}^2 \hookrightarrow \mathscr{F}^3 \hookrightarrow \cdots$ con

$$Ob\,\mathscr{F}^i = \{\mathrm{M} \in Ob\,\mathscr{M} \mid \mathrm{M}/\mathrm{Ker}(\theta^i_{\mathrm{M}}) \in Ob\,\mathscr{F}\}.$$

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

(2.1) TEOREMA. *Esiste un'unica traccia normalizzata su* $\hat{\mathscr{F}}$ *(che è propriamente ammissibile), estendente la traccia per gli endomorfismi di rango finito.*

Dimostrazione. Basta considerare la successione esatta

$$0 \to \mathrm{Ker}(\theta^i_{\mathrm{M}}) \to \mathrm{M} \to \mathrm{M}/\mathrm{Ker}(\theta^i_{\mathrm{M}}) \to 0$$

con $\mathrm{M} \in Ob\,\mathscr{F}^i$. Allora per una qualunque traccia T su $\hat{\mathscr{F}}$, risulta $\mathrm{T}([\mathrm{M}]) = \mathrm{T}([\mathrm{Ker}(\theta^i_{\mathrm{M}})]) + \mathrm{T}([\mathrm{M}/\mathrm{Ker}(\theta^i_{\mathrm{M}})])$, da cui segue il risultato in virtù del Teorema (1.1) e del seguente

(14) Cfr. anche A. Dold [5].

(2.2) LEMMA. *Se $\mathscr{C}$ è una qualunque categoria ammissibile ed* M *è un elemento di $Ob\,\mathscr{C}$ tale che $\theta_M^n = 0$ per qualche intero $n \geq 1$, allora per una qualunque traccia* T *definita su $\mathscr{C}$ risulta* $T([M]) = 0$.

Dimostrazione. Se $\theta_M = 0$, allora risulta $[M] = 0 . [M]$, e quindi $T([M]) = 0\,T([M]) = 0$. Se $n > 1$ si procede per induzione su n. Si considera la successione esatta $O \to \mathrm{Ker}(\theta_M) \to M \to M/\mathrm{Ker}(\theta_M) \to 0$, dalla quale si deduce che $T([M]) = T([\mathrm{Ker}(\theta_M)]) + T([M/\mathrm{Ker}(\theta_M)])$, donde il risultato, atteso che $\theta_{\mathrm{Ker}(\theta_M)} = 0$ e $\theta^{n-1}_{M/\mathrm{Ker}(\theta_M)} = 0$.

3. È implicito in quel che precede che le tracce su $\hat{\mathscr{F}}$ si ottengono come multipli a coefficienti in F e non nulli dell'unica traccia normalizzata su $\hat{\mathscr{F}}$, cioè che l'inclusione $\mathscr{F} \hookrightarrow \hat{\mathscr{F}}$ induce un isomorfismo tra $\overline{K_0(\mathscr{F})}$ e $\overline{K_0(\hat{\mathscr{F}})}$.

Per finire osserviamo che, se α, β sono endomorfismi in $\mathscr{C}$ dello stesso spazio vettoriale V corrispondenti ad elementi di $\hat{\mathscr{F}}$, allora anche $\alpha + \beta$ è tale, e risulta $\mathrm{Tr}(\alpha + \beta) = \mathrm{Tr}(\alpha) + \mathrm{Tr}(\beta)$, indicando ancora con Tr l'unica traccia normalizzata in $\hat{\mathscr{F}}$.

4. È poco più difficile provare che quanto appena detto per la categoria $\hat{\mathscr{F}}$ sussiste integralmente per la categoria $\mathscr{L}$ corrispondente agli endomorfismi di Leray, eccettuata l'ultima affermazione [15].

Vale a dire sussiste il seguente

(4.1) TEOREMA. *Dato $M \in Ob\,\mathscr{L}$, l'applicazione $T : K_0(\mathscr{L}) \to F$ definita dalla $[M] \to \mathrm{Tr}_L(\theta_M)$ è un omomorfismo non nullo di* F*-gruppi coincidente con l'unica traccia normalizzata su $\mathscr{L}$* [16]. *Tutte le altre tracce su $\mathscr{L}$ si ottengono come multipli a coefficienti in* F *e non nulli dell'omomorfismo* T.

(4.2) COROLLARIO. *L'inclusione $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{L}$ induce un isomorfismo tra $\overline{K_0(\mathscr{F})}$ e $\overline{K_0(\mathscr{L})}$.*

Dimostrazione. Si consideri la successione esatta $O \to N(\theta_M) \to M \to M/N(\theta_M) \to O$. Per una qualunque traccia T su $\mathscr{L}$ risulta allora $T([M]) = T([N(\theta_M)]) + T([M/N(\theta_M)]$, da cui segue il risultato in virtù della definizione di Tr_L, del Teorema (1.1) e del seguente

(4.3) LEMMA. *Detta $\mathscr{N}$ la sottocategoria di $\mathscr{N}$ (anzi di $\mathscr{L}$) costituita da tutti gli* A*-moduli* M *tali che $\forall m \in M$ esista un intero n, dipendente eventualmente da m,* tale che *$\theta_M^n(m) = 0$ (diremo allora che θ_M è localmente nilpotente), $\mathscr{N}$ è una categoria ammissibile priva di tracce, cioè, risulta $\overline{K_0(\mathscr{N})} = 0$.*

(15) Già sappiamo che, se α, β sono endomorfismi di Leray dello stesso spazio V, $\alpha + \beta$ non è necessariamente di Leray. Nel caso che anche $\alpha + \beta$ sia un endomorfismo di Leray, non sembra questione facile controllare se risulti o meno $\mathrm{Tr}_L(\alpha + \beta) = \mathrm{Tr}_L(\alpha) + \mathrm{Tr}_L(\beta)$. È stato comunicato agli Autori dallo stesso Prof. Leray che un controesempio in cui $\mathrm{Tr}_L(\alpha + \beta) \neq \mathrm{Tr}_L(\alpha) + \mathrm{Tr}_L(\beta)$ dovrebbe essere attualmente in corso di pubblicazione.

(16) È evidente che $\mathscr{L}$ è una categoria propriamente ammissibile.

Dimostrazione. Se $\dim_F(M)$ è finita, siamo nel caso del Lemma (2.2). In caso contrario, si consideri, dopo aver comunque fissato un elemento $a \in F$ diverso da zero, l'insieme S delle coppie (M', φ') con la condizione che M' sia un sottomodulo di M e φ' un automorfismo di M' tale che $a\theta_{M'} = \varphi' \theta_{M'} \varphi^{-1}$. In S si introduca una relazione di ordine parziale $<$ data dalla: $(M', \varphi') < (M'', \varphi'')$ se $M' \subset M''$ e φ'' estende φ'. Come è immediato controllare, S è (non vuoto ed) induttivo, di guisa che possiamo considerare un elemento (M_0, φ_0) massimale in S. Basterà ora provare che $M_0 = M$, perché allora risulterà $[M] = a \cdot [M]$, e quindi, per ogni eventuale traccia T su $\mathcal{N}$, $T([M]) = aT([M])$ da cui $T = 0$ come volevasi dimostrare. (È chiaro poi che $\mathcal{N}$ è ammissibile e su ciò non insistiamo).

Invero, se fosse M_0 contenuto strettamente in M, esisterebbe un elemento $m \in M$ non appartenente ad M_0 e quindi un intero $n \geq 1$ tale che $\theta_M^n(m) = 0$. Sia n il minimo intero positivo soddisfacente alla condizione indicata. Gli elementi $m, \theta_M(m), \cdots, \theta_M^{n-1}(m)$ sono linearmente indipendenti su F, come è immediato verificare, e lo spazio vettoriale da essi generato sopra F è addirittura un sottomodulo P di M tale che $P \cap M_0 = 0$. Risulta allora $M_0 \subset M_0 \oplus P = N$ e si può trovare un automorfismo φ di N che estende φ_0. Basta prendere $\varphi = \varphi_0 \oplus \chi$, ove χ è un automorfismo di P che realizza la relazione di similitudine tra le seguenti matrici quadrate di ordine n ad elementi in F

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{bmatrix}.$$

L'esistenza di χ porta all'assurdo in virtù della massimalità di (M_0, φ_0) in S.

IV. La questione dell'esistenza e dell'unicità della traccia in generale

1. Abbiamo visto nel paragrafo precedente alcuni esempi di calcolo del vettorializzato di un gruppo di Grothendieck al fine di studiare le tracce su una categoria ammissibile $\mathscr{C}$. Raccogliamo adesso alcuni risultati in forma generale.

Dal Teorema III (1.1) segue subito che una traccia normalizzata su di una categoria propriamente ammissibile $\mathscr{C}$ è certamente estensione della traccia ordinaria su $\mathscr{F}$. Così pure, indicato con $J : \mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{C}$ il funtore inclusione di $\mathscr{F}$ in $\mathscr{C}$, e con $J_* : K_0(\mathscr{F}) \to K_0(\mathscr{C})$ l'omomorfismo di F-gruppi indotto da J tra i rispettivi gruppi di Grothendieck, dal diagramma seguente

$$\begin{tikzcd} K_0(\mathscr{F}) \arrow[rr, "J_*"] \arrow[dr, "Tr"'] & & K_0(\mathscr{C}) \arrow[dl, "T"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

e dal Teorema appena richiamato, segue subito che sussiste la seguente

(1.1) PROPOSIZIONE. *Una categoria propriamente ammissibile ammette una traccia normalizzata* T *se, e soltanto se, il morfismo* J_* *induce un monomorfismo* $\bar{J}_* : \overline{K_0(\mathcal{F})} \to \overline{K_0(\mathcal{C})}$ *tra i vettorializzati dei rispettivi gruppi di Grothendieck, cioè se, e soltanto se,* $\bar{J}_* \neq 0$. *Inoltre, su* $\mathcal{C}$ *esiste un'unica traccia normalizzata, e quindi tutte le tracce si ottengono come multipli a coefficienti in* F *e non nulli di essa, se e soltanto se* $\bar{J}_*$ *è un isomorfismo.*

2. Per una categoria $\mathcal{C}$ che sia solamente ammissibile, il problema è quello di vedere se esistono tracce su $\mathcal{C}$, cioè di controllare se $\overline{K_0(\mathcal{C})}$ è o no uguale a zero. Abbiamo anzi visto prima un esempio di categoria $\mathcal{N}$ ammissibile tale che $\overline{K_0(\mathcal{N})} = 0$. Altri esempi di categorie, addirittura propriamente ammissibili, sulle quali non esistono tracce sono forniti dalla categoria $\mathcal{M}$ stessa e dalla categoria $\mathcal{M}f$ dei moduli finitamente generati su A. Risulta invero, come ben noto, $K_0(\mathcal{M}) = 0$ e $K_0(\mathcal{M}f) = \mathbf{Z}$ (e $\mathbf{Z}$ ha una struttura banale di F–gruppo, sicché $\overline{K_0(\mathcal{M}f)}$ è uguale a zero).

3. Studiamo ora il problema dell'esistenza di tracce normalizzate. Dalla considerazione della successione esatta $0 \to A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A/(x-1)A \to 0$, ove f è l'omotetia di rapporto $(x-1)$ e g è la proiezione canonica, si ricava che $[A/(x-1)A] = 0$ nel gruppo $K_0(\mathcal{C})$ di una categoria propriamente ammissibile $\mathcal{C}$ che contenga A (vale a dire $\bar{J}_* = 0$ in questo caso).

Ne segue subito la seguente

(3.1) PROPOSIZIONE. *Una categoria propriamente ammissibile* $\mathcal{C}$ *ammette una traccia normalizzata soltanto se è sottocategoria della categoria* $\mathcal{T}$ *degli* A*–moduli di torsione* (17).

Nota. La categoria $\mathcal{T} \cap \mathcal{M}f$ dei moduli di torsione finitamente generati su A coincide con $\mathcal{F}$ (18).

Ricordiamo il teorema di struttura dei moduli di torsione (cfr. ad esempio I. Kaplansky [13]):

(3.2) TEOREMA. *Per ogni elemento* $a \in F$, *diciamo componente a–primaria di* M *il sottomodulo* $M(a)$ *di* M *costituito da quegli elementi* $m \in M$ *tali che* $(x-a)^n m = 0$, *per qualche intero positivo* n. *Allora il modulo* M *coincide con la somma diretta* $\bigoplus_{a \in F} M(a)$ *delle sue componenti primarie.*

Nota. Evidentemente gli elementi $a \in F$ per i quali $M(a) \neq 0$ sono gli autovalori di θ_M. Gli elementi di $M(a)$ diconsi talvolta (quando non nulli) *autovettori generalizzati*, e i sottospazi $M(a)$ diconsi essi stessi *autospazi generalizzati*. In particolare poi, $M \in Ob\,\mathcal{N}$ (cioè θ_M è localmente nilpotente) se, e soltanto se, $M = M(0)$, ovvero, se, e soltanto se, θ_M ha come unico autovalore lo zero.

(17) Un A–modulo M dicesi di torsione se, $\forall m \in M$, esiste qualche elemento $p(x) \in A - 0$ tale che $p(x)\,m = 0$. L'endomorfismo θ_M dicesi in questo caso *localmente algebrico*.

(18) Cfr. ad esempio S. MacLane e Birkhoff [14], II, p. 15.

4. Chiamiamo adesso *molteplicità* (geometrica) di a in M l'intero $\nu(a) = \dim_F(M(a))$.

Facciamo vedere subito che la condizione $\nu(a) < \infty$, $\forall a \neq 0$, è una *condizione necessaria* per l'esistenza di una traccia normalizzata.

(4.1) TEOREMA. *Sia $\mathscr{C}$ una categoria propriamente ammissibile con una traccia normalizzata. Se* $M = \bigoplus_{a \in F} M(a) \in Ob\,\mathscr{C}$, *allora* $\nu(a)$ *deve essere finita* $\forall a \neq 0$.

Dimostrazione. È evidentemente sufficiente dimostrare che, se $M = M(a)$ ha un solo autovalore $a \neq 0$, ed $M \in Ob\,\mathscr{C}$, allora $\dim_F(M)$ è finita. Posto $N_h = \mathrm{Ker}((\theta_M - a\iota_M)^h)$, di guisa che $N_1 \hookrightarrow N_2 \hookrightarrow N_3 \hookrightarrow \cdots$ ed M coincide con il limite diretto dei sottomoduli N_h, cominciamo col dimostrare che $\dim_F(N_h) < \infty$. Intanto è chiaro che $\dim_F(N_1)$ è finita; altrimenti non sarebbe possibile definire la traccia di θ_{N_1}, poiché $\theta_{N_1} = a\iota_{N_1}$ e $T(\iota_{N_1})$ non ha senso [19].

Procediamo adesso per induzione su $h \geq 2$. L'affermazione segue subito dalla considerazione della successione esatta $O \to N_{h-1} \to N_h \to N_h/N_{h-1} \to O$, poiché la dimensione di N_h/N_{h-1} dev'essere finita (al pari di quella di N_{h-1}) poiché $\theta_{N_h/N_{h-1}} = a\iota_{N_h/N_{h-1}}$ e si ripete il ragionamento precedente.

Per provare ora che $\nu(a)$ è addirittura finita, si indichi con m_h la dimensione di N_h/N_{h-1} per $h = 2, 3, \cdots$. Facciamo vedere che $m_1 \geq m_2 \geq \geq m_3 \geq \cdots$. Dimostriamo dapprima che $m_1 \geq m_2$, e procediamo poi per induzione usando lo stesso ragionamento per il modulo $P = M/N_h$, per il quale l'analoga catena di sottomoduli $Q_1 \hookrightarrow Q_2 \hookrightarrow Q_3 \hookrightarrow \cdots$ è fornita dalla $Q_r = N_{h+r}/N_h$. Sia $v_1, \cdots, v_{m_1}$ una base di N_1 e $v_1, \cdots, v_{m_1}, v_{m_1+1}, \cdots, v_{m_1+m_2}$ una di N_2. L'endomorfismo $\theta_M - a\iota_M$ porta evidentemente N_2 in N_1, ed anzi in modo tale che i trasformati di $v_{m_1+1}, \cdots, v_{m_1+m_2}$ sono elementi di N_1 linearmente indipendenti sopra F, da cui la conclusione. Segue quindi che la successione delle codimensioni $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \cdots$ è stazionaria.

Sia m il valore definitivo della successione. Se $m = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Proviamo quindi per finire che è assurdo supporre $m > 0$. Sia ad esempio

$$\dim_F(N_{h_0}) = n_0 \quad , \quad \dim_F(N_{h_0+1}) = n_0 + m \quad , \quad \dim_F(N_{h_0+2}) = n_0 + 2m, \cdots.$$

Oltre ad M, risulta certo anche M/N_{h_0} elemento di $Ob\,\mathscr{C}$, quindi non è restrittivo supporre che sia sin dall'inizio $m_1 = m_2 = \cdots = m$ e $\dim_F(N_1) = m$.

Ciò supposto, l'applicazione $\theta_M - a\iota_M$ porta N_{h+1} in N_h, ed è, per quanto abbiamo visto, suriettiva. Possiamo così costruire una base $v_1, v_2, v_3, \cdots$

(19) Infatti, se $\dim_F(N_1) = \infty$, esisterebbe qualche sottomodulo $N_1' \subset N_1$ tale che $\dim_F(N_1/N_1') = 1$, e quindi $0 \to N_1' \to N_1 \to N_1/N_1' \to 0$ implicherebbe $[N_1/N_1'] = [N_1] - [N_1'] = [0]$ (poiché $N_1 \sim N_1'$) il che è assurdo.

di M (sopra F) tale che i primi m vettori appartengano ad N_1, i secondi m vettori appartengano ad N_2 e siano tali che $(\theta_M - a\iota_M)(v_i) = v_{i-m}$ per $i = m+1, \cdots, 2m$ e così via. Rispetto alla base indicata, θ_M si rappresenta attraverso la seguente matrice (infinita) ad elementi in F, i cui «blocchi» hanno tutti ordine m:

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc:cccc:c}
a & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\
0 & a & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 1 & & & & & \\
\hdashline
 & & & & a & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \\
 & & & & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \\
 & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 1 & \\
\hdashline
 & & & & & & & & & & & & \\
\end{array}\right]$$

Consideriamo adesso la successione esatta $0 \to N_1 \to M \to M/N_1 \to 0$. È chiaro che anche θ_{M/N_1} ha l'unico autovalore a, che M/N_1 è allo stesso modo limite diretto dei sottomoduli

$$N_h/N_1 = \operatorname{Ker}((\theta_{M/N_1} - a\iota_{M/N_1})^h) \qquad \text{per} \qquad h = 2, 3, \cdots$$

ed infine che θ_{M/N_1} ammette la stessa rappresentazione matriciale di θ_M rispetto alla base «immagine» della base precedentemente fissata. Ne consegue che M e M/N_1 sono isomorfi, sicché $[N_1] = [M] - [M/N_1] = [0]$, quindi $T([N_1]) = 0$ per ogni traccia normalizzata T su $\mathscr{C}$. Ma N_1 ha dimensione finita m sopra F, sicché $T([N_1]) = \operatorname{Tr}(\theta_{N_1})$ in virtù del Teorema III (1.1), pertanto $T([N_1]) = ma \neq 0$. L'assurdo prova l'asserto.

(4.2) *Osservazioni*. In conclusione abbiamo dimostrato che una categoria $\mathscr{C}$ propriamente ammissibile che ammetta tracce normalizzate deve essere necessariamente una sottocategoria della categoria $\mathscr{S}$ (anch'essa risultante propriamente ammissibile), costituita da tutti quei moduli di torsione M tali che $M(a)$ abbia dimensione finita per ogni elemento $a \neq 0$ in F.

In particolare dal Teorema (4.1) segue che la categoria $\mathscr{T}$ tutta intera non ammette tracce normalizzate.

V. LA TRACCIA SPETTRALE

1. Terminiamo questo lavoro determinando una categoria propriamente ammissibile $\mathscr{K}$, più grande di quella di Leray $\mathscr{L}$, possedente anch'essa una traccia normalizzata (la quale estende allora naturalmente la traccia di Leray) nel caso che il campo base F coincida con il campo **C** dei numeri complessi.

(1.1) DEFINIZIONE. *La categoria* $\mathcal{K}$ *è costituita da tutti quei moduli di torsione* M *tali che*:

(j) *esiste al più un'infinità numerabile di autovalori di* θ_M

(jj) $\dim_F (M(a)) = \nu(a) < \infty$, $\forall a \in F - O$,

(jjj) *la serie numerica* $\sum_a \nu(a)\, a$ *è assolutamente convergente.*

(1.2) DEFINIZIONE. *La somma delle serie in (jjj) si dice la traccia spettrale di* M, *in simboli* $T_s([M])$, *ovvero*, $T_s(\theta_M)$.

È agevole dimostrare che la categoria $\mathcal{K}$ è propriamente ammissibile e che T_s definisce veramente una traccia nel senso della Definizione II (5.2) (è ovvio poi che trattasi di una traccia normalizzata). Ciò segue immediatamente dal fatto che, se M′ è un sottomodulo di M, allora $M'(a)$ coincide con $M' \cap M(a)$, e $M(a)/M'(a) = M/M'(a)$, sicché in particolare $\nu(a) = \dim_F (M(a)) = \dim_F (M'(a)) + \dim_F (M/M'(a))$ (in altre parole, la molteplicità di a in M è la somma di quella di a in M′ e di a in M/M′).

Si osservi come qui (e nella stessa definizione che richiede una somma indipendente dall'ordine degli addendi) l'ipotesi dell'assoluta convergenza della serie «spettrale» sia del tutto necessaria.

2. La traccia spettrale T_s ha, rispetto alla traccia di Leray, il vantaggio di poter essere calcolata anche per particolari automorfismi di uno spazio vettoriale di dimensione infinita. È chiaro che essa estende Tr_L in quanto $\mathcal{L}$ coincide con quella sottocategoria di $\mathcal{K}$ costituita da quei moduli M tali che esista soltanto un numero finito di autovalori di θ_M e $\mathrm{Tr}_L([M]) = \sum_a \nu(a)\, a$, essendo la somma a secondo membro estesa a quella totalità finita di autovalori.

3. Osserviamo per concludere che la categoria $\mathcal{K}$ è la *massima* categoria propriamente ammissibile (nel caso $F = \mathbf{C}$) che ammetta una traccia normalizzata, qualora si aggiunga nella definizione di traccia la condizione che T sia *fortemente additiva*, cioè commuti con le somme infinite:

$$T([\bigoplus_{i \in I} M_i]) = \sum_{i \in I} T([M_i]),$$

ove la serie a secondo membro è assolutamente convergente (da qui segue in particolare che $T([M_i])$ deve essere diverso da zero al più per un'infinità numerabile di valori di i). Come è ovvio allora, in virtù dei risultati già visti, la traccia spettrale T_s è l'unica traccia normalizzata fortemente additiva sulla categoria $\mathcal{K}$.