Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franca Franchi

Sulla propagazione del calore con velocità finita in un fluido in moto

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.2, p. 212–219.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_2_212_0>

Fisica matematica. — *Sulla propagazione del calore con velocità finita in un fluido in moto.* Nota di FRANCA FRANCHI [(*)], presentata [(**)] dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — The author derives the heat propagation equation for forced convection replacing Fourier's law by a constitutive equation generalising Cattaneo's one. Then, for the above mentioned equation, she establishes a uniqueness theorem for finite domains.

1. In una Nota pubblicata anni fa, il Cattaneo [1] propose, per mezzi in quiete, la seguente relazione costituitiva fra il vettore flusso di calore $\boldsymbol{q}$ e la temperatura T:

$$\tau \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} = - \boldsymbol{q} - \chi \operatorname{grad} T \tag{1,1}$$

in cui χ è la conduttività termica, quantità positiva, e τ è un parametro positivo molto piccolo; ovviamente per $\tau = 0$, la (1,1) si riduce alla ben nota legge di Fourier.

Riferendosi a mezzi isotropi e omogenei in quiete, il Cattaneo provò che la (1,1) conduce ad un'equazione di conduzione del calore di tipo iperbolico [(1)], a cui corrisponde una velocità finita di propagazione.

Più recentemente Gurtin e Pipkin [2], considerando materiali con memoria, anche non lineari, svilupparono una teoria della propagazione del calore con velocità finita molto generale, in cui rientra l'equazione (1,1) di Cattaneo.

Gurtin e Pipkin hanno anche derivato, dalla loro teoria generale, l'equazione linearizzata per la propagazione del calore di tipo iperbolico contenente termini ereditari [(2)].

Per questa equazione, con opportune condizioni iniziali e alla frontiera, sempre nel caso dei corpi in quiete, J. Nunziato [3] ha determinato un teorema di unicità; altri teoremi di unicità, sempre però nei mezzi di quiete, sono stati ottenuti da J. M. Finn e L. T. Wheeler [4] e da R. P. Hermann e R. Ray Nachlinger [5], quest'ultimi per la teoria non lineare.

Non mi risulta però, che finora sia stato trattato qualche problema sulla propagazione del calore in un fluido in moto (propagazione per convezione), qualora all'equazione costitutiva di Fourier si sostituisca un'equazione più generale.

In questa Nota, intendo studiare la propagazione del calore in un fluido omogeneo in moto, nel caso più semplice della convenzione forzata ossia nel

(*) Borsista del C.N.R.
(**) Nella seduta del 12 febbraio 1977.
(1) Cfr. [1] eq. 21 nel caso unidimensionale.
(2) Cfr. [2] eq. (7,18).

caso in cui si suppone nota la velocità $\boldsymbol{v}$ delle particelle del fluido, sostituendo però alla legge del Fourier l'equazione del Cattaneo.

È bene subito notare che, nella (1,1) poiché, $\boldsymbol{q}$ e T si riferiscono alla medesima particella che all'istante t si trova nel punto P, bisogna anzitutto scrivere al posto della derivata locale di $\boldsymbol{q}$, quella materiale o totale $(\mathrm{d}\boldsymbol{q}/\mathrm{d}t)$; però, come ha osservato il Fox [8], per ottenere un'equazione che soddisfa il principio di oggettività materiale, si deve aggiungere alla derivata materiale di $\boldsymbol{q}$ il termine $-\omega\times\boldsymbol{q}$, con $\omega=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$.

Quindi, nel caso del fluido in moto, assumeremo come equazione costitutiva la seguente:

$$\tau\left[\left(\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{dP}}\,\boldsymbol{v}\right)-\omega\times\boldsymbol{q}\right]=-\boldsymbol{q}-\chi\operatorname{grad}\mathrm{T} \tag{1,2}$$

dove $(\mathrm{d}\boldsymbol{q}/\mathrm{dP})$ è il tensore doppio di componenti (se riferite ad un sistema di riferimento cartesiano y_i, $i=1,2,3)\, q_{i/j}$; ovviamente q_i sono le componenti del vettore $\boldsymbol{q}$ lungo gli assi y_i, $q_{i/j}$ è la derivata di q_i rispetto a y_j. È evidente che se $\boldsymbol{v}=0$, la (1,2) si riduce alla (1,1) e se esiste un potenziale di velocità, il vettore velocità angolare ω è nullo e la (1,2) si deduce dalla (1,1), sostituendo alla derivata parziale di $\boldsymbol{q}$, quella materiale; comunque, quest'ultima equazione, sarebbe sempre un caso particolare della (1,2).

In questa Nota, ricercherò anzitutto, trascurando, per la piccolezza di τ, i termini contenenti a fattore τ^2, l'equazione a cui soddisfa la temperatura. A questo scopo, associerò alla (1,2) l'equazione che esprime il bilancio dell'energia calorifica:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{q}=-c\rho\,\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t}=-c\rho\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}+\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{v}\right) \tag{1,3}$$

dove ρ è la densità del fluido all'istante t, mentre c è il calore specifico della trasformazione termodinamica compiuta dalla particella nell'intervallo di tempo $t, t+\mathrm{d}t$; in generale, nei fluidi, la trasformazione si può ritenere a pressione costante; in ogni caso, come per la teoria ordinaria della propagazione del calore, si supporrà c costante, indipendente da P e da t.

Stabilirò per l'equazione suddetta, un teorema di unicità valido in un certo dominio fisso $\mathscr{D}$, limitato da una superficie Σ regolare e per un intervallo di tempo $[0, t']$, $t'>0$ e del resto qualsiasi.

Ho dimostrato il teorema per le eventuali soluzioni di classe $\mathscr{C}^2$ rispetto alle coordinate e al tempo in $\mathscr{D}_{t'}=\mathscr{D}\times(0,t')$ e di classe $\mathscr{C}^1$ in $\overline{\mathscr{D}}_{t'}=\overline{\mathscr{D}}\times[0,t']$, qualora siano assegnati in tutto $\mathscr{D}$ e all'istante $t=0$, i valori di T e di $(\partial\mathrm{T}/\partial t)$ (condizioni iniziali) e per ogni istante $t\geq 0$ e $\mathrm{P}\in\Sigma$ il valore di T (condizioni alla frontiera) e nell'ipotesi che la velocità $\boldsymbol{v}$ sia limitata in $\overline{\mathscr{D}}\times[0, t']$ assieme alle sue derivate prime e seconde, spaziali e temporali.

Inoltre, per la validità del teorema citato, occorre ammettere che in tutto $\mathscr{D}\times(0,t')$ sia verificata la seguente relazione (n numero positivo):

$$\chi-\lambda\chi\tau-c\rho\,\tau v^2\geq n>0 \tag{1.4}$$

essendo λ l'estremo superiore in $\mathcal{D}_{t'}$, degli autovalori di $\mathrm{D}\,(\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{dP})$, parte simmetrica del tensore doppio $(\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{dP})$.

È bene notare che, per la piccolezza di τ, la (1,4) non appare molto restrittiva.

2. Per ricavare l'equazione a cui soddisfa la temperatura T, cerchiamo di eliminare $\boldsymbol{q}$ fra la (1,2) e la (1,3); allo scopo, deriviamo totalmente rispetto a t la (1,3); tenendo anche presente l'equazione di continuità del moto dei fluidi, si può scrivere:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{q} = -\,c\rho\,\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{T}}{\mathrm{d}t^2} - c\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t} = -\,c\rho\,\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{T}}{\mathrm{d}t^2} + c\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2,1}$$

Ovviamente, per un fluido incompressibile, è nullo l'ultimo termine della (2,1).

Eseguendo quindi la divergenza ai due membri della (1,2), ricordando anche una ben nota formula, si ha:

$$\tau\,\mathrm{div}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t} - \tau\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} + \tau\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\omega} = -\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{q} - \chi\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{T}\,. \tag{2,2}$$

Ora, indicato con $\mathrm{I}_l\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{dP}}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\right)$ l'invariante lineare del prodotto $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{dP}}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}$, valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned}\tau\,\mathrm{div}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t} &= \tau\,\mathrm{div}\,\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial t} + \tau\,\mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{dP}}\,\boldsymbol{v}\right) = \tau\,\mathrm{div}\,\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial t} + \\ &+ \tau\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{v} + \tau\mathrm{I}_l^{(3)}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{dP}}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\right) = \tau\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{q} + \tau\mathrm{I}_l\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{dP}}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\right).\end{aligned} \tag{2,3}$$

Sostituendo poi nella (2,2) al posto di $\tau\,\mathrm{div}\,(\mathrm{d}\boldsymbol{q}/\mathrm{d}t)$, l'espressione (2,3) e tenendo conto anche delle (1,3) e (2,1) si ricava la seguente equazione:

$$\begin{aligned}&-\,c\rho\,\tau\,\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{T}}{\mathrm{d}t^2} + c\rho\,\tau\,\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} - \tau\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} + \tau\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\omega} + \\ &+ \tau\mathrm{I}_l\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{dP}}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\right) - c\rho\,\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}t} + \chi\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{T} = 0.\end{aligned} \tag{2,4}$$

Nella (2,4) però, compaiono ancora dei termini in $\boldsymbol{q}$; per eliminarli, nelle nostre approssimazioni, deriviamo rispetto al punto P la (1,2); dopo averne molti-

(3) Questo passaggio, del resto ben noto, si può giustificare nel modo seguente: ricordando che $q_{i/j}$ sono le componenti di $(\mathrm{d}\boldsymbol{q}/\mathrm{dP})$ e v_j quelle di $\boldsymbol{v}$ (in un fissato riferimento cartesiano), si ha:

$$\mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{dP}}\,\boldsymbol{v}\right) = (q_{i/j}\,v_j)_{/i} = (q_{i/i})_{/j}\,v_j + q_{i/j}\,v_{j/i} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{v} + \mathrm{I}_l\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{dP}}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\right).$$

plicato i due membri per τ, è:

$$(2,5)\qquad \tau\frac{d\boldsymbol{q}}{dP} = -\tau^2\frac{d}{dP}\left(\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{q}\right) - \chi\tau\frac{d\,\mathrm{grad}\,T}{dP}\,.$$

da cui si deduce non solo che $\tau\,(d\boldsymbol{q}/dP)$ è, a meno di termini in τ^2, eguale a $\chi\tau\,(d/dP)\,\mathrm{grad}\,T$, ma anche che $\tau\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{q}$ è dell'ordine di τ^2 in quanto le sue componenti sono espresse dal doppio della parte emisimmetrica del tensore $(d\boldsymbol{q}/dP)$ e $d\,\mathrm{grad}\,T/dP$ è un tensore doppio simmetrico. Quindi, sostituendo la (2,5) nella (2,4) e trascurando i termini in τ^2, si ottiene l'equazione cercata a cui soddisfa T:

$$(2,6)\qquad -c\rho\,\tau\frac{d^2 T}{dt^2} + c\rho\,\tau\frac{dT}{dt}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} - \chi\tau\,\mathrm{I}_l\left(\frac{d\,\mathrm{grad}\,T}{dP}\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\right) +$$
$$+ \chi\tau\,\mathrm{grad}\,T\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} - c\rho\frac{dT}{dt} + \chi\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,T = 0\,.$$

Se τ fosse nulla, la (2,6) si riduce naturalmente all'ordinaria equazione di propagazione del calore per convezione (4).

In quest'equazione, si possono poi eliminare le derivate materiali di T, sostituendole con quelle locali. Si ha infatti, ricordando l'espressione per (dT/dt):

$$(2,7)\qquad \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{grad}\,T\cdot\boldsymbol{v}\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + 2\,\mathrm{grad}\frac{\partial T}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v} +$$
$$+ \mathrm{grad}\,T\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,(\mathrm{grad}\,T\cdot\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}\,.$$

La (2,6) è dunque l'equazione cercata ed è, come subito si nota, di tipo iperbolico.

Notiamo infine che nel caso $(d\boldsymbol{v}/dP) = 0$ (e quindi $\boldsymbol{\omega} = 0$), cioè nel caso di una corrente fluida uniforme, il terzo e il quarto termine della (2,6) sono nulli e perciò la (2,6) è valida senza trascurare i termini in τ^2.

3. Passerò ora a dimostrare il teorema di unicità per l'equazione (2,6) con le condizioni iniziali e alla frontiera precisate al n. 1.

Poiché la (2,6) è lineare in T e per le ipotesi fatte all'inizio su $\boldsymbol{v}$, basterà provare che le eventuali soluzioni delle (2,6) soddisfacenti a condizioni iniziali e alla frontiera nulle, sono identicamente nulle. Per la dimostrazione del teorema, premettiamo le seguenti notazioni, del resto ben note.

Date due funzioni $f(P,t)$ e $a(P,t)$ continue in $\mathscr{D}\times(0\,,t')$ e inoltre $a(P,t)$ sia positiva, dirò che:

$$(3,1)\qquad f(P,t) = O\,(a\,(P,t))\qquad (\text{o più brevemente } f = O\,(a))$$

(4) Si veda p.e. [6], vol. II, p. 247.

se, in ogni punto di $\mathcal{D}\times(0, t')$, accade che:

$$|f(\mathrm{P}, t)| < \mathrm{M}a(\mathrm{P}, t) \tag{3,2}$$

dove M è una costante positiva.

È facile provare che, se due funzioni f_1 e f_2 sono entrambe $\mathrm{O}(a)$, anche la loro somma è $\mathrm{O}(a)$ e inoltre il prodotto di una funzione $\mathrm{O}(a)$ per una funzione limitata è sempre una funzione del tipo $\mathrm{O}(a)$.

Servendosi poi della diseguaglianza di Cauchy, si ha che se:

$$f = \mathrm{O}(a) \quad , \quad g = \mathrm{O}(b) \Rightarrow f\cdot g = \mathrm{O}(a^2) + \mathrm{O}(b^2) \tag{3,3}$$

In particolare, dati i vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ con $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ limitati, si ha:

$$(\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{a}) = \mathrm{O}(a) \quad , \quad (\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{b}) = \mathrm{O}(b) \Rightarrow (\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{b}) = \mathrm{O}(a^2) + \mathrm{O}(b^2). \tag{3,3'}$$

Poiché moltiplicheremo la (2,6) per $(\partial\mathrm{T}/\partial t)$ è bene tener presente le seguenti formule:

$$\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\operatorname{div}(\operatorname{grad}\mathrm{T}) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\operatorname{grad}\mathrm{T}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}^2\mathrm{T} \tag{3,4}$$

$$2\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\operatorname{grad}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)^2\cdot\boldsymbol{v} = \operatorname{div}\left(\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)^2\boldsymbol{v}\right) - \left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)^2\operatorname{div}\boldsymbol{v} \tag{3,5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v} &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}(\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}\right) - \\ &- \operatorname{grad}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}\,(\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{v}) - \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}(\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{v})\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \\ &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}(\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{v})^2 + \\ &+ (\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{v})\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} - \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}(\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{v})\operatorname{div}\boldsymbol{v}.\end{aligned} \tag{3,6}$$

Ora in base alla (3,5) e (3,6), ricordando le formule (2,7) e le (3,1), (3,2), (3,3) e (3,3'), per le ipotesi fatte su $\boldsymbol{v}$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{v})^2 + \\ &+ \operatorname{div}\left(\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)^2\boldsymbol{v}\right) + \operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}(\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}\right) + \mathrm{O}\left[\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)^2\right] + \mathrm{O}(\operatorname{grad}^2\mathrm{T}).\end{aligned} \tag{3,7}$$

Si ha poi ricordando l'espressione di $(d\mathrm{T}/dt)$ e la (3,3):

$$\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\frac{d\mathrm{T}}{dt} = \mathrm{O}\left[\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)^2\right] + \mathrm{O}(\operatorname{grad}^2\mathrm{T}). \tag{3,8}$$

$$\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\operatorname{grad}\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{\omega} = \mathrm{O}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\operatorname{grad}\mathrm{T}\right) = \mathrm{O}\left[\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)^2\right] + \mathrm{O}(\operatorname{grad}^2\mathrm{T}). \tag{3,9}$$

Poiché (d grad T/dP) è un tensore doppio simmetrico, detta D ($\mathrm{d}\boldsymbol{v}$/dP) la parte simmetrica di ($\mathrm{d}\boldsymbol{v}$/dP), per formule note, si può scrivere:

$$(3,10) \qquad \mathrm{I}_l\left(\frac{\mathrm{d\,grad\,T}}{\mathrm{dP}}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\right)=\mathrm{I}_l\left(\frac{\mathrm{d\,grad\,T}}{\mathrm{dP}}\,\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\right)^{(5)}=$$

$$=\operatorname{div}\left(\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\,\mathrm{grad\,T}\right)-\operatorname{div}\left(\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\right)\cdot\mathrm{grad\,T}$$

e quindi dopo qualche passaggio:

$$(3,11) \qquad \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\,\mathrm{I}_l\left(\frac{\mathrm{d\,grad\,T}}{\mathrm{dP}}\,\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\right)=\operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\,\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\,\mathrm{grad\,T}\right)-$$

$$-\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\,\mathrm{grad\,T}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{grad\,T}-\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\operatorname{div}\left(\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\right)\cdot\mathrm{grad\,T}=$$

$$=\operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\,\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\,\mathrm{grad\,T}\right)-\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\,\mathrm{grad\,T}\cdot\mathrm{grad\,T}\right)+$$

$$+\,\mathrm{O}\,(\mathrm{grad}^2\,\mathrm{T})+\mathrm{O}\left[\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)^2\right].$$

Allora se moltiplichiamo la (2,6) per (∂T/∂t), servendoci delle formule ricavate sopra (3,4), (3,5), (3,7), (3,8), (3,9) e (3,11), si ottiene dopo semplici calcoli, la seguente equazione:

$$(3,12) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi}{2}\,\mathrm{grad}^2\,\mathrm{T}+\frac{c\rho\,\tau}{2}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)^2-\frac{\chi\tau}{2}\,\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\,\mathrm{grad\,T}\cdot\mathrm{grad\,T}-\right.$$

$$\left.-\,\frac{c\rho\,\tau}{2}\,(\mathrm{grad\,T}\cdot\boldsymbol{v})^2\right)+\operatorname{div}\left(-\chi\,\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\,\mathrm{grad\,T}+c\rho\,\tau\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)^2\boldsymbol{v}+\right.$$

$$\left.+\,\chi\tau\,\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\,\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\,\mathrm{grad\,T}+c\rho\,\tau\,\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\,(\mathrm{grad\,T}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}\right)=$$

$$=\mathrm{O}\left[\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\right)^2\right]+\mathrm{O}\,(\mathrm{grad}^2\,\mathrm{T}).$$

Ora ricordando la (1,4) si ha, dopo aver posto:

$$a=\frac{\chi}{2}\,\mathrm{grad}^2\,\mathrm{T}-\frac{\chi\tau}{2}\,\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\,\mathrm{grad\,T}\cdot\mathrm{grad\,T}^{(6)}-\frac{c\rho\,\tau}{2}\,(\mathrm{grad\,T}\cdot\boldsymbol{v})^2.$$

$$(3,13) \qquad a\geq\left(\frac{\chi}{2}-\frac{\chi\tau\lambda}{2}-\frac{c\rho\,\tau}{2}\,v^2\right)\mathrm{grad}^2\,\mathrm{T}\geq\frac{n}{2}\,\mathrm{grad}^2\,\mathrm{T}.$$

(5) Cfr. [7] formula $(38)_3$ p. 137.

(6) Si ricava per la supposta limitatezza delle derivate di $\boldsymbol{v}$ e ricordando la definizione di λ (n. 1), che:

$$\left(\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dP}}\,\mathrm{grad\,T}\cdot\mathrm{grad\,T}\right)\leq\lambda\,\mathrm{grad}^2\,\mathrm{T}$$

per una dimostrazione di questo risultato si può per esempio vedere cfr. [9], p. 133.

Ciò premesso, si sostituisca a al primo membro della (3,12) e si integri la (3,12) sul dominio $\mathscr{D}$, applicando dove è possibile il teorema della divergenza; ricordando il significato del simbolo O, indicati con N_1 e N_2 due numeri positivi (n versore normale a Σ), si ottiene:

$$(3,14) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{D}} a + \frac{c\rho\tau}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 d\mathscr{D} + \int_{\Sigma}\left(-\chi\frac{\partial T}{\partial t}\operatorname{grad} T + c\rho\tau\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 \boldsymbol{v} + \right.$$

$$\left. + \chi\tau\frac{\partial T}{\partial t} D\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\operatorname{grad} T + c\rho\tau\frac{\partial T}{\partial t}(\operatorname{grad} T\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{n}\, d\Sigma \leq$$

$$\leq \int_{\mathscr{D}}\left(N_1 \operatorname{grad}^2 T + N_2\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2\right) d\mathscr{D}.$$

L'integrale esteso a Σ è nullo, poiché per $\forall t \in [0, t']$, $\forall P \in \Sigma$, T e quindi anche $(\partial T/\partial t)$ sono nulli.

Si osservi inoltre che, essendo per ipotesi $(\partial T/\partial t)$ e T nulli per $t = 0$ e per ogni $P \in \mathscr{D}$, sarà tale anche grad T e quindi a.

Allora, integriamo la (3,14) da 0 a $t\,(t < t')$, ponendo poi in luogo di a il suo valore minorante $(n/2)\operatorname{grad}^2 T$; detto poi m il più piccolo fra $(n/2)$ e $(c\rho\,\tau/2)$ e M il più grande fra N_1 e N_2 (m, M costanti positive), si ricava:

$$(3,16) \qquad \int_{\mathscr{D}}\left(\operatorname{grad}^2 T + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2\right) d\mathscr{D} \leq \frac{M}{m}\int_0^t dt\int_{\mathscr{D}}\left(\operatorname{grad}^2 T + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2\right) d\mathscr{D}.$$

Da cui, in base al noto lemma di Gronwall, segue $\forall t \in [0, t']$:

$$(3,17) \qquad \int_{\mathscr{D}}\left(\operatorname{grad}^2 T + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2\right) d\mathscr{D} = 0$$

e quindi per $P \in \mathscr{D}$ e $t \in [0, t']$

$$(3,18) \qquad \operatorname{grad} T \equiv 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial t} \equiv 0 .$$

Dalla (3,18), ricordando che T è nulla all'istante iniziale, si trae:

$$T(P, t) \equiv 0 , \qquad \forall P \in \mathscr{D} \quad , \quad \forall t \in [0, t'] .$$

Il teorema di unicità è così dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. CATTANEO (1948) – Atti del seminario matematico e fisico dell'Università di Modena, «Compt. Rend. Acad. sci.», *247*, 431–33 (1958).
[2] M. E. GURTIN e A. C. PIPKIN (1968) – «Arch. Rat. Mech. Anal.», *31*, 113–126.
[3] J. W. NUNZIATO (1971) – «Quart. Appl. Math.», *29*, 187–204; (1972) «SIAM J. Appl. Math.», *25*, 1–4.
[4] J.M. FINN e L. T. WHEELER (1972) – «Z. angew. Math. Phys.», *23*, 927–940.
[5] R. P. HERMANN e R. RAY NACHLINGER (1974) – «Int. J. Eng. Sci.», *12*, 865–874.
[6] P. FRANK, e R. VON MISES (1927) – *Die differential und integralgleichungen der Mechanick und Physik*, Vol. II, Vieweg e Sohn – Braunechweig,.
[7] P. BURGATTI (1937) – *Elementi di calcolo vettoriale e omografico*, Hoepli Milano.
[8] N. FOX (1969) – *Generalised thermoelasticity*, «Int. J. Eng. Sci.», *7*, 437–445.
[9] D. GRAFFI (1930) – *Sulla teoria della propagazione del calore per convezione naturale*, «Rend. Lincei», (6°) XII, pp. 129–135.