

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

SEBASTIANO SORDO

**Sulla stabilità della doppia schiera di vortici alternati  
in prossimità di una parete**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 62 (1977), n.2, p. 204–211.*  
Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1977\\_8\\_62\\_2\\_204\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_2_204_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Meccanica dei fluidi.** — *Sulla stabilità della doppia schiera di vortici alternati in prossimità di una parete.* Nota I di SEBASTIANO SORDO, presentata (\*) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — This report concerns a quite important problem, from the technical point of view, which I think has been studied and solved for the first time.

The problem deals with a Bénard-Kármán street of vortices which moves near a wall—i.e. a wing of a plane—and which is generated in a particular asymmetric field of fluid.

This asymmetric problem cannot be reduced to the symmetric fields of fluid already studied and referred to streets of vortices in a channel of finite or infinite breadth, parallel to the axis of the row.

1. Nella Nota che qui si presenta, è stato impostato ed avviato a soluzione, ritengo per la prima volta, un problema, che come si vedrà in seguito, ha una notevole rilevanza tecnica.

Si tratta del moto di una schiera di vortici di Bénard-Kármán, che si stacca in prossimità di una parete, ad esempio l'ala di un aereo, dando luogo ad una configurazione di campo particolare asimmetrico, al quale non sono riconducibili i campi simmetrici già studiati per scie vorticosose in fluido indefinitamente esteso e di fluido limitato da due pareti parallele all'asse della schiera.

È opportuno a questo punto accennare brevemente alle precedenti ricerche sulle schiere vorticosose di Kármán per meglio comprendere la differenza fra detti lavori ed il presente.

Il moto piano di un corpo cilindrico che si muove in un fluido indefinito, normalmente alle generatrici, dà origine ad una formazione di vortici, che, per determinati valori del numero di Reynolds relativi al corpo immerso, assumono un andamento regolare, dando luogo ad una doppia schiera di vortici alternati osservati per la prima volta da Bénard.

Le ricerche relative alla schiera vorticososa anzidetta ed altre derivate da questa, di importanza considerevole nella teoria della resistenza dei corpi immersi, sono state rivolte essenzialmente allo studio della loro stabilità [1]-[6] e alla determinazione della forza resistente che si oppone al moto del corpo quando a poppa di esso si manifesta una scia del tipo sopra citato [8], [9].

Il problema della stabilità di una doppia schiera vorticososa è stato affrontato inizialmente da Kármán nello schema di moto piano irrotazionale di liquido perfetto, incomprimibile e illimitato.

(\*) Nella seduta del 12 febbraio 1977.

Tale rappresentazione, ormai classica, costituisce uno schema fisico del fenomeno abbastanza particolare, in quanto essa assimila un liquido reale ad un liquido perfetto in moto irrotazionale in cui punti dotati di velocità limitata (centro del vortice reale) vengono sostituiti con punti, in cui la velocità tende all'infinito, per cui le dissipazioni, anche per viscosità del fluido molto piccola, giocano un ruolo non ben definito ma certo non del tutto trascurabile.

Detta schematizzazione però, anche se presenta alcune incoerenze con il fatto fisico, è stata di notevole aiuto a tutti i ricercatori che si sono occupati dei problemi inerenti alle schiere vorticosi, rappresentando bene il fenomeno in senso asintotico, e cioè non appena ci si discosta dai nuclei vorticosi.

Il problema della stabilità è stato a lungo discusso da più ricercatori e G. Pezzoli ha concluso di recente che la doppia schiera di vortici alternati di Kármán, anche se è l'unica osservata in natura, è totalmente instabile, e che la forza instabilizzante è minima in corrispondenza di tutta una serie di situazioni relative alle possibili configurazioni rette dalla relazione

$$(1) \quad \frac{\text{arch } \sqrt{2}}{\pi} \leq \frac{h}{l} \leq \frac{\text{arch } \sqrt{3}}{\pi}$$

che rappresenta appunto il campo entro cui oscilla il rapporto  $h/l$  che sperimentalmente si rileva sui vortici a poppa di un cilindro (vedi fig. 1).

2. Recentemente, in relazione ad alcune situazioni reali, si è posto il problema del comportamento della scia di Kármán quando questa è generata da un corpo in moto in vicinanza di una parete; scopo di questa Nota è quindi quello di indagare sulla stabilità di una schiera siffatta.

Il problema, apparentemente analogo a quello trattato da Rosenhead [7] per schiere di vortici equidistanti da pareti parallele, è in realtà alquanto più complesso, data la mancanza di simmetria del campo e l'impossibilità quindi di ricorrere alle funzioni ellittiche dotate di doppia periodicità.

Esso si affronta ugualmente con il metodo delle immagini, simulando con altre doppie schiere speculari la presenza della parete, che diventa una linea di corrente rettilinea che separa il campo fra la schiera virtuale e quella reale, sulla quale, come conseguenza del metodo, si ha una velocità indotta parallela alla parete.

Lo schema adottato in questa trattazione è ancora quello di Kármán di moto piano irrotazionale di liquido perfetto, anche se, in vicinanza della parete stessa, per la presenza dello strato limite, le ipotesi perdono di validità.

Considerando la parete coincidente con l'asse delle  $x$  ed adottando le ipotesi sopraccennate, possiamo scrivere il potenziale complesso risultante dalla somma delle schiere reali e virtuali:

$$(2) \quad f(z) = \frac{J}{2\pi i} \left[ \ln \frac{\sin \frac{\pi}{l} (z - z_0)}{\sin \frac{\pi}{l} (z - z_0')} - \ln \frac{\sin \frac{\pi}{l} (z - z_0''')}{\sin \frac{\pi}{l} (z - z_0'')} \right]$$

essendo:

$$\begin{aligned}
 J &= \text{intensità del generico vortice} \\
 z_0 &= \text{affissa di un vortice assegnato} \\
 (3) \quad z'_0 &= z_0 - l/2 - ih \\
 z''_0 &= z_0 - l/2 - 2iD \\
 z'''_0 &= z_0 - i(h + 2D)
 \end{aligned}$$

e  $D = h/2 + d/2$  la distanza tra l'asse della doppia schiera e la parete, mentre  $h$ ,  $l$  e  $d/2$  hanno significato di distanza tra le due schiere semplici, passo della schiera, distanza tra la schiera più vicina alla parete e la parete stessa (fig. 1).

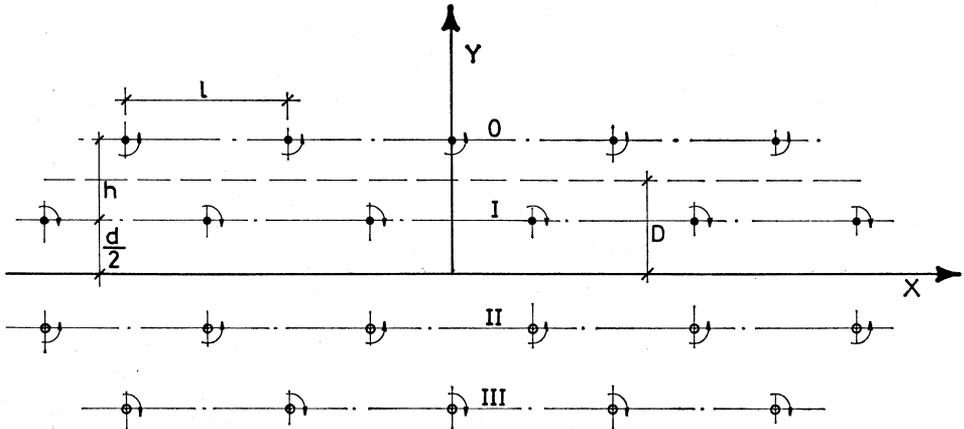


Fig. 1.

Per studiare la stabilità del sistema spostiamo, secondo il procedimento classico, di una quantità infinitesima ogni vortice dalla sua posizione di equilibrio ed esaminiamo se la risultante delle forze agenti sui vortici tende a riportarli nella configurazione primitiva o ad allontanarli ulteriormente.

Per eseguire questa verifica consideriamo ad esempio il vortice di affissa  $z_0$  e calcoliamo la sua velocità indotta dal resto del sistema.

Per definizione di potenziale complesso dalla (1) si ha

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{2\pi i}{J} (u_0 - iv_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{\pi}{l} \cotg \frac{\pi}{l} (z - z_0) - \frac{1}{z - z_0} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\pi}{l} \cotg \frac{\pi}{l} (z - z'_0) + \frac{\pi}{l} \cotg \frac{\pi}{l} (z - z''_0) - \frac{\pi}{l} \cotg \frac{\pi}{l} (z - z'''_0) \right\}.
 \end{aligned}$$

Sostituiamo ora la cotangente con il suo sviluppo in serie (vedi [1]) e poniamo:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad z_0 + kl &= z_k & z''_0 + kl &= z''_k \\
 z_0 - kl &= z_{-k} & z''_0 - kl &= z''_{-k} \\
 z'_0 + kl &= z'_k & z'''_0 + kl &= z'''_k \\
 z'_0 - kl &= z'_{-k} & z'''_0 - kl &= z'''_{-k}
 \end{aligned}$$

osserviamo allora che sostituendo in (4) le (5), ed eseguendo il passaggio a limite, la (4) stessa diviene:

$$(6) \quad \frac{2\pi}{J} (v_0 + iu_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{I}{z_0 - z_k} + \frac{I}{z_0 - z_{-k}} \right) - \frac{I}{z_0 - z'_0} - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{I}{z_0 - z'_k} + \frac{I}{z_0 - z'_{-k}} \right) + \frac{I}{z_0 - z''_0} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{I}{z_0 - z''_k} + \frac{I}{z_0 - z''_{-k}} \right) - \frac{I}{z_0 - z'''_0} - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{I}{z_0 - z'''_k} + \frac{I}{z_0 - z'''_{-k}} \right).$$

A causa dello spostamento infinitesimo  $\delta z$ , subito da ogni vortice del sistema reale e di quello speculare, relativo ai vortici del sistema virtuale, il vortice di affissa  $z_0$  avrà una variazione di velocità che, ricordate le (3) e (5) si scrive:

$$(7) \quad \frac{2\pi}{J} \left( \frac{d\eta_0}{dt} + i \frac{d\xi_0}{dt} \right) = \frac{I}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta z_k + \delta z_{-k}}{k^2} - \frac{2}{l^2} \delta z_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I}{k^2} + \\ + \delta z_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{I}{[(k - \frac{1}{2})l - ih]^2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta z'_k}{[(k - \frac{1}{2})l - ih]^2} + \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta z''_k}{[(k - \frac{1}{2})l - 2iD]^2} - \delta z_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{I}{[(k - \frac{1}{2})l - 2iD]^2} + \\ + \delta z_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{I}{[kl - i(h + 2D)]^2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\delta z'''_k}{[kl - i(h + 2D)]^2}.$$

Sono note d'altra parte le somme delle serie

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I}{k^2} &= \frac{\pi^2}{6} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{I}{[(k - \frac{1}{2})l - ih]^2} &= \frac{\pi^2}{l^2 ch^2} \frac{\pi h}{l} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{I}{[(k - \frac{1}{2})l - 2iD]^2} &= \frac{\pi^2}{l^2 ch^2} \frac{2\pi D}{l} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{I}{[kl - i(h + 2D)]^2} &= - \frac{\pi^2}{l^2 sh^2} \frac{\pi(h + 2D)}{l} \end{aligned} \right.$$

mentre definiamo come segue gli spostamenti arbitrari infinitesimi dei vortici, tenuto conto della specularità dei due sistemi reale e virtuale, affinché la linea di corrente che simula la parete si mantenga rettilinea:

$$(9) \quad \begin{cases} \delta z_k = \xi_k + i\eta_k \\ \delta z'_k = \xi'_k + i\eta'_k \\ \delta z''_k = \xi'_k - i\eta'_k \\ \delta z'''_k = \xi_k - i\eta_k. \end{cases}$$

Mediante la sostituzione di (8) e (9), ed eguagliando le parti reali e i coefficienti dell'immaginario, dalla (7), dopo aver trasformato le  $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$  in  $\sum_{k=1}^{\infty}$  sostituendo le  $\sum_{k=-\infty}^0$  con le  $\sum_{k=1}^{\infty}$  mediante il cambiamento di  $k$  in  $-(k-1)$  nelle  $\Sigma$  che contengono  $(k-1/2)$  e di  $k$  in  $-k$  in quelle che contengono  $k$ , si ottiene il sistema:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{2\pi}{J} \frac{d\xi_0}{dt} &= \frac{\pi^2}{l^2} \left[ \frac{1}{ch^2 \frac{\pi h}{l}} - \frac{1}{ch^2 \frac{2\pi D}{l}} - \frac{1}{s h^2 \frac{\pi(h+2D)}{l}} - \frac{1}{3} \right] \eta_0 + \\ &+ \frac{1}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k + \eta_{-k}}{k^2} - 2hl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\frac{1}{2})(\xi'_k - \xi'_{-(k-1)})}{[(k-\frac{1}{2})^2 l^2 + h^2]^2} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\frac{1}{2})^2 l^2 - h^2}{[(k-\frac{1}{2})^2 l^2 + h^2]^2} (\eta'_k + \eta'_{-(k-1)}) + \\ &+ 4Dl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\frac{1}{2})(\xi'_k - \xi'_{-(k-1)})}{[(k-\frac{1}{2})^2 l^2 + 4D^2]^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\frac{1}{2})^2 l^2 - 4D^2}{[(k-\frac{1}{2})^2 l^2 + 4D^2]^2} \cdot \\ &\cdot (\eta'_k + \eta'_{-(k-1)}) - 2l(h+2D) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(\xi_k - \xi_{-k})}{[k^2 l^2 + (h+2D)^2]^2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 l^2 - (h+2D)^2}{[k^2 l^2 + (h+2D)^2]^2} (\eta_k + \eta_{-k}) - \frac{1}{(h+2D)^2} \eta_0. \\ \frac{2\pi}{J} \frac{d\eta_0}{dt} &= \frac{\pi^2}{l^2} \left[ \frac{1}{ch^2 \frac{\pi h}{l}} - \frac{1}{ch^2 \frac{2\pi D}{l}} - \frac{1}{s h^2 \frac{\pi(h+2D)}{l}} - \frac{1}{3} \right] \xi_0 + \\ &+ \frac{1}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k + \xi_{-k}}{k^2} + 2hl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\frac{1}{2})(\eta'_k - \eta'_{-(k-1)})}{[(k-\frac{1}{2})^2 l^2 + h^2]^2} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\frac{1}{2})^2 l^2 - h^2}{[(k-\frac{1}{2})^2 l^2 + h^2]^2} (\xi'_k + \xi'_{-(k-1)}) + \end{aligned}$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &+ 4 D l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k - \frac{1}{2}) (\eta'_k - \eta'_{-(k-1)})}{[(k - \frac{1}{2})^2 l^2 + 4 D^2]^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k - \frac{1}{2}) l^2 - 4 D^2}{[(k - \frac{1}{2})^2 l^2 + 4 D^2]^2} \\ &\cdot (\xi'_k + \xi'_{-(k-1)}) - 2 l (h + 2 D) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k (\eta_k - \eta_{-k})}{[k^2 l^2 + (h + 2 D)^2]^2} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 l^2 - (h + 2 D)^2}{[k^2 l^2 + (h + 2 D)^2]^2} (\xi_k + \xi_{-k}) + \frac{1}{(h + 2 D)^2} \xi_0. \end{aligned} \right.$$

Si ricavano quindi tanti gruppi di equazioni quanti sono i vortici della prima fila, mentre per quanto riguarda i vortici della seconda fila si hanno equazioni analoghe alle precedenti; il sistema così ottenuto, di infinite equazioni in infinite incognite, ammette soluzioni rappresentabili con deformazioni periodiche del tipo

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_k &= M e^{i\omega(\lambda + x_k)} \\ \eta_k &= iN e^{i\omega(\lambda + x_k)} \\ \xi'_k &= M' e^{i\omega(\lambda + x'_k)} \\ \eta'_k &= iN' e^{i\omega(\lambda + x'_k)} \end{aligned} \right.$$

facendo la convenzione di considerare solamente la parte reale delle espressioni a secondo membro in cui  $\omega, \lambda, M, N, M', N'$  sono costanti.

Mediante calcoli abbastanza lunghi, anche se privi di particolari difficoltà, che qui per brevità si omettono, facendo comparire nei termini delle equazioni i rapporti  $h/l$  e  $2 D/l$ , dopo alcune trasformazioni si ottiene il sistema risolvente nelle quattro incognite  $M, N, M', N'$ .

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} (\alpha + A) M - (B + C + E) N + (F - G) M' + (H + I) N' &= 0 \\ (B + C - E) M + (\alpha + A) N + (I - H) M' - (F + G) N' &= 0 \\ (F + G) M - (H + I) N + (\alpha - L) M' + (P + C + Q) N' &= 0 \\ -(I - H) M - (F - G) N - (P + C - Q) M' + (\alpha - L) &= 0 \end{aligned} \right.$$

in cui è:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{2 \pi}{J} l^2 \omega \lambda \\ A &= 4 \frac{h + 2 D}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin \omega l k}{\left[ k^2 + \left( \frac{h + 2 D}{l} \right)^2 \right]^2} \\ B &= \pi^2 \left[ \frac{1}{c h^2} \frac{\pi h}{l} - \frac{1}{c h^2} \frac{\pi 2 D}{l} - \frac{1}{s h^2} \frac{\pi (h + 2 D)}{l} - \frac{1}{3} \right] \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 (13) \quad C &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \omega l k}{k^2} \\
 E &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - \left(\frac{h+2D}{l}\right)^2}{\left[k^2 + \left(\frac{h+2D}{l}\right)^2\right]^2} \cos \omega l k - \frac{1}{\left(\frac{h+2D}{l}\right)^2} \\
 F &= 4 \frac{h}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\frac{1}{2}) \sin \omega l (k-\frac{1}{2})}{\left[(k-\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right]^2} \\
 G &= 4 \cdot \frac{2D}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\frac{1}{2}) \sin \omega l (k-\frac{1}{2})}{\left[(k-\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{2D}{l}\right)^2\right]^2} \\
 H &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\frac{1}{2})^2 - \left(\frac{h}{l}\right)^2}{\left[(k-\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right]^2} \cos \omega l (k-\frac{1}{2}) \\
 I &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-\frac{1}{2})^2 - \left(\frac{2D}{l}\right)^2}{\left[(k-\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{2D}{l}\right)^2\right]^2} \cos \omega l (k-\frac{1}{2}) \\
 L &= 4 \cdot \left(\frac{2D-h}{l}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin \omega l k}{\left[k^2 + \left(\frac{2D-h}{l}\right)^2\right]^2} \\
 P &= \pi^2 \left[ \frac{1}{ch^2} \frac{\pi h}{l} - \frac{1}{ch^2} \frac{\pi 2D}{l} - \frac{1}{sh^2} \frac{\pi (2D-h)}{l} - \frac{1}{3} \right] \\
 Q &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - \left(\frac{2D-h}{l}\right)^2}{\left[k^2 + \left(\frac{2D-h}{l}\right)^2\right]^2} \cos \omega l k - \frac{1}{\left(\frac{2D-h}{l}\right)^2} .
 \end{aligned}$$

Esso ammette soluzioni non tutte nulle in  $M, N, M', N'$  solo se si annulla il determinante dei coefficienti che, posto per comodità di calcolo

$$\begin{aligned}
 (14) \quad b &= -(B + C + E) & c &= (F - G) \\
 d &= (H + I) & a_1 &= (B + C - E) \\
 c_1 &= (I - H) & d_1 &= (F + G) \\
 d_2 &= (P + C + Q) & c_3 &= -(P + C - Q)
 \end{aligned}$$

si può scrivere nella forma semplificata:

$$(15) \quad \begin{vmatrix} (\alpha + A) & b & c & d \\ a_1 & (\alpha + A) & c_1 & -d_1 \\ d_1 & -d & (\alpha - L) & d_2 \\ -c_1 & -c & c_3 & (\alpha - L) \end{vmatrix} = 0.$$

L'equazione che deriva dallo sviluppo del determinante (15) risolve in parte il problema delle stabilità della schiera vorticoso studiata come sarà meglio visto in una prossima Nota.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] VILLAT (1930) - *Leçon sur la théorie des tourbillons*. Gauthier-Villars. Ed. Paris.
- [2] H. LAMB - *Hydrodynamics*, V ed., Cambridge, University Press.
- [3] H. BOUASSE (1931) - *Tourbillons, forces acoustiques, circulations diverses*. Tome I. Librairie Delagrave, Paris.
- [4] G. DURAND (1933) - *Sur les petits mouvements d'un système infini de tourbillons autour d'une position d'équilibre*. « Public. Scientif. du Ministère de l'Air », Paris.
- [5] B. R. WILLE (1960) - *Kármán vortex street*. *Advances in Applied Mechanics*. Vol. VI, Academic Press, New York and London.
- [6] G. PEZZOLI (1964) - *Sulla stabilità delle schiere di vortici. La doppia schiera di Bénard-Kármán*. « Rendiconti Accademia dei Lincei », n. 2.
- [7] L. ROSENHEAD (1929) - *The Kármán Street of Vortices in a Channel of finite breath*. « Phil. Trans. of the Royal Society of London », june.
- [8] M. J. L. SYNGE (1927) - « Proc. Roy. Irish Acad. », t. XXXVII, A.
- [9] L. BUTERA (1969) - *Alcune osservazioni sulle schiere di vortice*, Atti e Rassegna Tecnica della Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino, Settembre.