Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gianantonio Pezzoli

Determinazione diretta del profilo di un'onda di oscillazione irrotazionale al limite del frangimento

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.2, p. 190–195.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_2_190_0>

Meccanica dei fluidi. — *Determinazione diretta del profilo di un'onda di oscillazione irrotazionale al limite del frangimento.* Nota di GIANANTONIO PEZZOLI, presentata (*) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — In this paper we expose a direct variational method for the evaluation by finite terms of oscillatory irrotational waves in deep water.

1. Si propone quì un metodo sintetico per la determinazione diretta del profilo di frangimento di un'onda di oscillazione irrotazionale in profondità infinita.

È noto che questo problema è stato affrontato da diversi Autori, Stokes [1], Michell [2], Rayleigh [3], ed in tempi più recenti da Struik [4], Davies [5] e ultimamente da Cocchi [6].

A Michell e Davies si devono calcoli della ripidità di frangimento, per approssimazioni successive, mentre a Stokes resta il merito di aver dimostrato che qualunque onda irrotazionale frange quando si forma sulla sua cresta un punto angoloso, e le tangenti al profilo formano un angolo di 120°.

Tuttavia una descrizione più completa del campo di moto di un'onda periodica al frangimento è dovuta, con particolari applicazioni di trasformazioni conformi a G. Cocchi, che recentissimamente ha fornito un metodo la cui convergenza alla soluzione del problema è assicurata in partenza e nel quale le valutazioni numeriche possono essere spinte al grado di approssimazione richiesto.

È possibile cioè, in questo caso, assegnare un limite per l'errore che si commette, cosa non facile in tutti gli altri metodi.

Mi è sembrato tuttavia che con l'uso di alcuni accorgimenti, prima di tutti quello classico di Stokes, inerente al calcolo dell'angolo di frangimento, e con l'applicazione di alcune proprietà evidenti e di noti teoremi, si possa giungere ad una descrizione sintetica, non di tutto il campo di moto, ma del profilo di frangimento di un'onda irrotazionale periodica in profondità infinita in un liquido perfetto.

2. Dato che a profondità infinita la velocità è nulla, sovrapponiamo a tutto il campo una velocità uguale e contraria alla celerità di propagazione dell'onda; si ottiene così un moto stazionario con linea di superficie, che è linea di corrente, libera e fissa, sotto la quale scorre una corrente con velocità asintotica a profondità infinita, uniforme e pari a c.

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1977.

Riferendoci a fig. 1, consideriamo una particella liquida che parta da zero, punto nel quale la velocità si annulla, e cada liberamente fino a raggiungere il punto più basso della traiettoria in B e quindi, essendo il liquido perfetto e perciò privo di attrito, risalga fino a giungere in A, nuovamente con velocità uguale a zero.

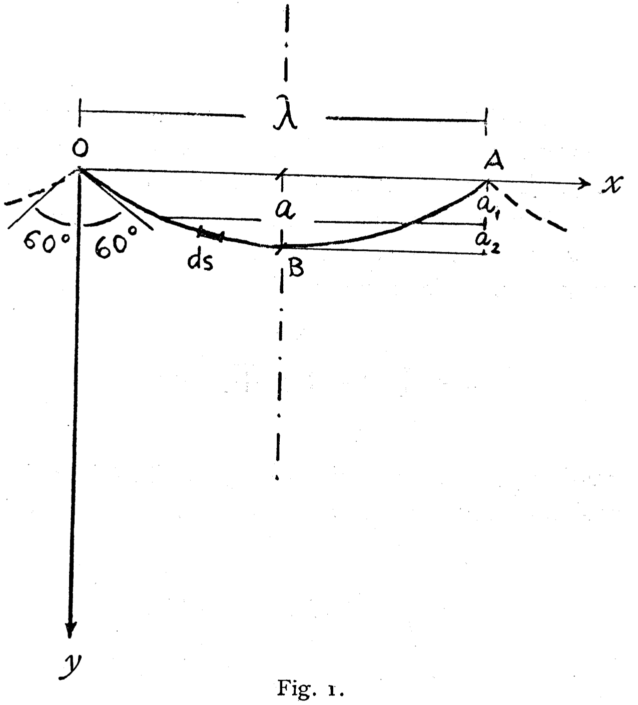

Fig. 1.

L'asse delle y è positivo verso il basso, e perciò essendo nulla la pressione sul pelo libero, la velocità sul medesimo è data in ogni punto da

$$V = \sqrt{2gy} \tag{1}$$

indicando con la stessa y l'ordinata di punti appartenenti alla curva limite.

Si deve ora imporre la condizione che il moto sia irrotazionale, ed a questo punto soccorre il teorema di Thomson (Lord Kelvin) [7], che assicura che assegnato un certo dominio, se in esso il moto di liquido perfetto è anche irrotazionale, l'energia cinetica sarà la minima possibile.

Poiché il campo di moto è per noi limitato alla curva limite, l'elemento di massa dm, sarà proporzionale all'elemento di linea ds, per cui l'energia cinetica elementare, indicando con β una costante positiva si può scrivere:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,V^2 = \beta y\,\mathrm{d}s \tag{2}$$

ed essendo notoriamente

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

l'energia cinetica totale da rendere minima prende in definitiva la forma:

$$E = \int_0^\lambda \beta y \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \min . \tag{4}$$

Con ciò il problema, ricondotto a forma variazionale è ancora lontano dall'essere risolto, dato che la (4) non soddisfa alla condizione all'infinito.

Sembrerebbe arduo poter indicare con una proprietà della curva di superficie che si tratta di un'onda in profondità illimitata; si ricordi tuttavia che la curva compresa fra A e B nella detta situazione è la più lunga possibile, in quanto se la profondità diminuisce, le orbite delle particelle si appiattiscono e quindi le linee di corrente risultano meno concave verso l'alto, pur partendo dagli estremi sempre con lo stesso angolo.

Perciò la lunghezza L della curva

$$L = \int_s ds = \int_0^\lambda \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{5}$$

dovrà essere massima, per cui cambiando segno alla (5) ed indicando con α una costante positiva opportuna che congloba anche β, dovrà aversi:

$$I = \int_0^\lambda F(y, y')\, dx = \min \tag{6}$$

essendo:

$$F = y \sqrt{1 + y'^2} - \alpha \sqrt{1 + y'^2} = (y - \alpha) \sqrt{1 + y'^2} . \tag{7}$$

Il problema di calcolo delle variazioni così posto è di soluzione abbastanza semplice; dato che la (7) non contiene esplicitamente la x, l'equazione di Eulero relativa alla (6) ha un'integrale primo immediatamente determinabile e dato da:

$$F - y' \frac{dF}{dy'} = \text{cost} . \tag{8}$$

La (8) conduce subito alla

$$(y - \alpha) \sqrt{1 + y'^2} - (y - \alpha) \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = K \tag{9}$$

avendo indicato con K la costante d'integrazione, per ora arbitraria.

Dalla (9) si trae:

$$y - \alpha = K \sqrt{1 + y'^2} \tag{10}$$

e quindi esplicitando rispetto a y'

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y-\alpha}{K}\right)^2 - 1}\,. \tag{11}$$

L'integrazione della (11) è immediata è dà:

$$y = \alpha + K \operatorname{ch}\left(\frac{x}{K} - c_1\right) \tag{12}$$

essendo c_1 la seconda costante di integrazione.

Poiché deve essere $y = 0$ sia per $x = 0$ che per $x = \lambda$, risulta subito

$$c_1 = \frac{\lambda}{2\,K} \tag{13}$$

ed essendo $y'(0) = (1/\sqrt{3})$ per il noto risultato di Stokes, si ha anche immediatamente

$$\operatorname{sh}\left(-\frac{\lambda}{2\,K}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{14}$$

che fornisce

$$K = -\frac{\lambda}{2 \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{3}}} \tag{15}$$

e di conseguenza

$$\alpha = \lambda \frac{\operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2 \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{3}}}\,. \tag{15'}$$

Rammentando ora che è $\operatorname{arsh} z = \ln(z + \sqrt{z^2+1})$, nonché la definizione del coseno iperbolico, si ottiene immediatamente:

$$\operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{3}} = \ln \sqrt{3} \quad , \quad \operatorname{ch}\left(\operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,. \tag{16}$$

L'espressione di y viene quindi ad assumere la forma:

$$y = \frac{\lambda}{2 \ln \sqrt{3}} \left\{\frac{2}{\sqrt{3}} - \operatorname{ch}\left[\ln \sqrt{3}\left(1 - 2\,\frac{x}{\lambda}\right)\right]\right\} \tag{17}$$

da cui, ricordando che l'ampiezza massima dell'onda si ottiene, per la simmetria, per $x = \lambda/2$, si ha subito:

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1}{2 \ln \sqrt{3}} = 0{,}14081449 \tag{18}$$

che è il valore della ripidità al frangimento ed ha uno scostamento relativo dell'1,8 $^0/_{00}$ rispetto al valore trovato da G. Cocchi, pari a 0,14107, assegnato dall'Autore con un errore del 2 $^0/_{00}$. Maggiore risulta invece quello dato da Davies, eguale a 0,1443; in questo caso però mi sembra più incerta la valutazione dell'errore.

La posizione della linea del pelo libero indisturbato, è data da una semplice operazione di media sulla (17) che, sempre con riferimento alla fig. 1, fornisce, essendo $a_1 + a_2 = a$

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_1}{\lambda} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}\ln\sqrt{3}}\left(2 - \dfrac{1}{\ln\sqrt{3}}\right) = 0{,}09434339 \\[2ex] \dfrac{a_2}{\lambda} = \dfrac{1}{2\ln\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}\ln\sqrt{3}} - 1\right) = 0{,}04647110\,. \end{cases}$$

Il rapporto fra a_1 e a_2 vale 2,03, cioè, rispetto al pelo libero indisturbato la cresta ha da questo, una distanza doppia di quella del cavo.

Poiché la velocità del punto di intersezione dei peli liberi, ondoso e di quiete, è pari alla celerità c dell'onda, il teorema di Bernoulli fornisce subito la relazione:

$$(20)\qquad \frac{c^2}{2g} = a_1$$

cioè

$$(21)\qquad c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\left[\frac{2\pi}{\sqrt{3}\ln\sqrt{3}}\left(2 - \frac{1}{\ln\sqrt{3}}\right)\right]^{1/2}$$

pari a:

$$(22)\qquad c = 1{,}08883151\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

con un errore del 3 $^0/_{00}$ sul valore assegnato da Cocchi ed eguale a $1{,}0923\sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}}$.

Il metodo indicato ha tuttavia dei limiti che sono costituiti dal non potersi porre condizioni per ricavare l'andamento del pelo libero in casi diversi da quello trattato (ad esempio in profondità limitata) e nell'impossibilità di dedurre completamente il campo di moto.

Tuttavia, se il ragionamento fatto è, come mi sembra, corretto, il profilo trovato per l'onda in profondità infinita al punto di frangimento è rigoroso e assegnato in maniera esplicita.

TABELLA I

x/λ	y/λ (1)	y/λ (2)
0,05	0,02729	0,02769
0,10	0,05150	0,05222
0,15	0,07269	0,07362
0,20	0,09093	0,09194
0,25	0,10626	0,10716
0,30	0,11875	0,11945
0,35	0,12843	0,12896
0,40	0,13531	0,13572
0,45	0,13944	0,13974
0,50	0,14081	0,14107

In Tabella I ho riportato l'andamento della curva trovata (indice 1), confrontato con quello calcolato da G. Cocchi (indice 2), per una semionda.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. G. STOKES (1847) – *On the theory of Oscillatory Waves*. «Camb. Trans.».
[2] A. G. MICHELL (1893) – *The Highest Waves in Water*. «Phil. Mag.».
[3] Lord RAYLEIGH (1876) – *On waves*. London Dub. and Ed., Phil. Mag.
[4] D. J. STRUIK (1926) – *Détermination rigoureuse des ondes irrotationnelles périodiques dans un canal à profondeur finie*. «Math. Ann.».
[5] T. V. DAVIES (1951) – *The theory of symmetrical gravity waves of finite amplitude*. «Proc. of London Ray. Soc.».
[6] G. COCCHI (1976) – *Onde di oscillazione al limite del frangimento* – XV Convegno di Idraulica, Roma, ottobre.
[7] W. THOMSON (Lord Kelvin) (1849) – *On the Vis-Viva of a Liquid in motion*. «Camb. and Dub. Math. Journ.».