Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luigi F. Mamone

Un problema inerente al reticolo delle topologie su di una potenza cartesiana

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.2, p. 122–125.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_2_122_0>

Algebra. — *Un problema inerente al reticolo delle topologie su di una potenza cartesiana.* Nota di LUIGI F. MAMONE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We investigate the lattice structure of the set of box topologies within the lattice of all topologies of a cartesian power for a given set and find out that it is a sub–$\vee$–semilattice but not, in general, a sublattice. Further we show that it is a sublattice iff the given set is finite. Starting from these results we remark that the set of all topologies compatible with a given algebra is a complete semilattice but not, in general, a lattice.

1. È noto che la famiglia delle topologie definibili su di un insieme assegnato è, rispetto alla relazione di finezza $\subseteq$, un reticolo completo. Lo scopo di questo Lavoro sarà quello di studiare da un punto di vista reticolare l'insieme delle topologie prodotto su una potenza cartesiana. Nel seguito indicheremo con $\mathscr{C}_A$ il reticolo delle topologie su di un insieme A e con T_A il suo sostegno; inoltre, se α è un cardinale, indicheremo con $T_A^{(\alpha)}$ il sottinsieme di T_{A^α} costituito dalle topologie prodotto su A e con $t^{(\alpha)}$ la topologia prodotto, elemento di $T_A^{(\alpha)}$, relativa alla topologia t di T_A. I principali risultati conseguiti nel presente Lavoro sono espressi dai seguenti enunciati.

I) *Se* α *è un cardinale e* A *un insieme, allora* $T_A^{(\alpha)}$ *è un sub–*$\vee$*–semireticolo di* $\mathscr{C}_{A^\alpha}$ *ed in particolare, se* α *è finito, è un sub–*$\vee$*–semireticolo completo.*

II) *Dato un intero positivo* n, *condizione necessaria e sufficiente perché* $T_A^{(n)}$ *sia un sub–reticolo completo di* $\mathscr{C}_{A^n}$ *è che* A *sia finito.*

Le Proposizioni I e II danno infine, come avremo modo di osservare, soluzione al problema, sollevato da M. Fattorosi–Barnaba in [3], di determinare la struttura, per ciò che attiene la relazione di finezza, dell'insieme di tutte le topologie compatibili con una data algebra.

2. Cominciamo a provare la seguente proposizione:

III) *Se* A *è un insieme fissato ed* α *è un cardinale, allora, data una famiglia* $\{t_i \in T_A : i \in I\}$ *si ha:*

$$\bigvee_{i\in I} t_i^{(\alpha)} = \left(\bigvee_{i\in I} t_i\right)^{(\alpha)} \tag{2.1}$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} t_i\right)^{(\alpha)} \subseteq \bigcap_{i\in I} t_i^{(\alpha)}. \tag{2.2}$$

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1977.

Dimostrazione. In generale è vero che, se $t_1, t_2 \in T_A$ e $t_1 \subseteq t_2$, allora $t_1^{(\alpha)} \subseteq t_2^{(\alpha)}$. Poiché risulta $\bigcap_{i\in I} t_i \subseteq t_i \subseteq \bigvee_{i\in I} t_i$, per ogni $i \in I$, elevando alla α ogni membro delle precedenti inclusioni segue subito la (2.2) e la inclusione del primo membro della (2.1) nel secondo membro.

Per provare completamente la (2.1) basta dimostrare che:

$$\left(\bigvee_{i\in I} t_i\right)^{(\alpha)} \subseteq \bigvee_{i\in I} t_i^{(\alpha)}. \tag{2.3}$$

Per ciò è evidentemente sufficiente mostrare che esiste una sottobase di $\left(\bigvee_{i\in I} t_i\right)^{(\alpha)}$ contenuta in $\bigvee_{i\in I} t_i^{(\alpha)}$. Consideriamo all'uopo la famiglia F di tutti i prodotti cartesiani del tipo $\prod_{\gamma\leq\alpha} B_\gamma$, contenuti in A^α, tali che per ogni indice γ, salvo al più un numero finito di essi, $B_\gamma = A$ e, per un numero finito di indici $\gamma_0, \cdots, \gamma_k$, si abbia $B_{\gamma_0}, \cdots, B_{\gamma_k} \in \bigcup_{i\in I} t_i$; allora manifestamente F è una sottobase di $\left(\bigvee_{i\in I} t_i\right)^{(\alpha)}$. Se $\prod_{\gamma\leq\alpha} B_\gamma \in F$ e se inoltre $B_{\gamma_0}, \cdots, B_{\gamma_k}$ sono tutti e soli i fattori diversi da A, allora esisteranno $t_{i_0}, \cdots, t_{i_k} \in \{t_i \in T_A : i \in I\}$ tali che $B_{\gamma_0} \in t_{i_0}, \cdots$ $\cdots, B_{\gamma_k} \in t_{i_k}$. Detti allora $Y_n = \prod_{\gamma\leq\alpha} X_\gamma \in t_{i_n}^{(\alpha)}$, tal che per ogni $\gamma \neq \gamma_n$ sia $X_\gamma = A$ e $X_{\gamma_n} = B_{\gamma_n}$, per ogni n tale che $0 \leq n \leq k$, risulterà $Y_0 \cap \cdots \cap Y_k =$ $= \prod_{\gamma\leq\alpha} B_\gamma \in \bigvee_{i\in I} t_i^{(\alpha)}$, ne segue che $F \subseteq \bigvee_{i\in I} t_i^{(\alpha)}$ e quindi l'asserto.

Dalla (2.1) si ha che $T_A^{(\alpha)}$ è in generale un sub-$\bigvee$-semireticolo di $\mathscr{C}_{A^\alpha}$ e per di più, qualora α sia un cardinale finito, un sub-$\bigvee$-semirticolo completo. Rimane così dimostrata la Proposizione I. Notiamo che la completezza di $T_A^{(\alpha)}$ come sub-$\bigvee$-semireticolo non si ha per ogni cardinale per la impossibilità di esprimere la topologia discreta su una potenza infinita come topologia prodotto, nella guisa mostrata dal seguente esempio. Per ogni $k \in N$ sia $t_k = \{N, \varnothing, \{k\}\}$ l'infraspazio di $\mathscr{C}_N$ associato a k; allora risulta che $\left(\bigvee_{k\in N} t_k\right)^{(\omega)}$ è la più fine tra le topologie prodotto su N^N, ma non è la topologia discreta su N^N.

Osserviamo infine che, da quanto dimostrato nella Proposizione III, segue una generalizzazione di un risultato già ottenuto in [7] e cioè che, se $\mathfrak{A}$ è un'algebra e se $\{t_i : i \in I\}$ è una famiglia di topologie compatibili con $\mathfrak{A}$, allora $\bigvee_{i\in I} t_i$ è ancora una topologia compatibile con $\mathfrak{A}$.

Proviamo ora che:

IV) *Dato un insieme* A, *condizione necessaria e sufficiente affinché, scelti comunque* $t_1, t_2 \in T_A$, *per ogni intero positivo* n *risulti*

$$(t_1 \cap t_2)^{(n)} = t_1^{(n)} \cap t_2^{(n)}, \tag{2.4}$$

è che A *sia finito*.

Dimostrazione. Supponiamo che A sia finito e dimostriamo che vale la (2.4); per il che, in forza della (2.2), basta mostrare che, dati $t_1, t_2 \in T_A$, risulta $t_1^{(n)} \cap t_2^{(n)} \subseteq (t_1 \cap t_2)^{(n)}$ per ogni n. Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ l'affermazione è banalmente verificata; supponiamo allora che scelto $n > 1$ risulti vera l'affermazione per ogni $k \leq n - 1$, e proviamola per quell'n. Indicato nel seguito con $e_i^n(z)$ la i–esima proiezione $(1 \leq n \leq k)$ di un qualsiasi punto z di A^n, sia $B \subseteq A^n$ un aperto di $t_1^{(n)} \cap t_2^{(n)}$; allora per ogni punto p di A^n definiamo i seguenti insiemi: $D_1(p) = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in A^{n-1} : (x_1, \cdots \cdots, x_{n-1}, e_n^n(p)) \in B\}$ e l'insieme $D_2(p) = e_n^n(\{(x_1, \cdots, x_n) \in B : x_1 = e_1^n(p), \cdots \cdots, x_{n-1} = e_{n-1}^n(p)\})$. Per ogni $(x_1, \cdots, x_{n-1}, e_n^n(p))$ appartenente a B esiste allora un blocco aperto in $t_1^{(n)}$, $X_0 \times \cdots \times X_{n-1}$, ed un blocco aperto in $t_2^{(n)}$, $Y_0 \times \cdots \times Y_{n-1}$, tali che siano entrambi contenuti in B e tali che $(x_1, \cdots \cdots, x_{n-1}, e_n^n(p))$ appartenga alla loro intersezione; pertanto i blocchi $X_0 \times \cdots \cdots \times X_{n-2}$ ed $Y_0 \times \cdots \times Y_{n-2}$ sono contenuti in $D_1(p)$ e coprono $D_1(p)$ al variare di $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ in $D_1(p)$, onde $D_1(p)$ è un aperto di $t_1^{(n-1)} \cap t_2^{(n-1)}$. Poiché per l'ipotesi induttiva si ha che $t_1^{(n-1)} \cap t_2^{(n-1)} = (t_1 \cap t_2)^{(n-1)}$, allora $D_1(p)$ sarà aperto in $(t_1 \cap t_2)^{(n-1)}$. Analogamente $D_2(p)$ apparterrà a $t_1 \cap t_2$ e quindi in A^n il sottinsieme $D(p) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in A^n : (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in D_1(p)$ ed $x_n \in D_2(p)\}$ sarà un aperto di $(t_1 \cap t_2)^{(n)}$.

Sia ora $z \in B$ e sia $S = D(z) \cap (A^n - B)$. Se $S = \varnothing$, allora $z \in D(z) \subseteq B$. Supponiamo che $S \neq \varnothing$; allora per ogni $q \in S$ sia $W_q = D(z) \cap D(q)$: si avrà quindi che, per ogni $q \in S, q \notin W_q$ e $z \in W_q$. Infatti, $q \notin B$ e quindi $q \notin D(q) \supseteq W_q$. Inoltre, poiché $q \in S, (e_1^n(q), \cdots, e_{n-1}^n(q), e_n^n(z))$ appartiene a B, dunque $e_n^n(z) \in D_2(q)$. Dal fatto che $q \in S$ si ha che $q \in D(z)$ e pertanto $(e_1^n(z), \cdots, e_{n-1}^n(z), e_n^n(q))$ appartiene a B; ne segue allora che $(e_1^n(z), \cdots \cdots, e_{n-1}^n(z))$ è un elemento di $D_1(q)$ e $z \in D(q)$, quindi $z \in W_q$. Poiché $D(q)$ e $D(z)$ sono aperti di $(t_1 \cap t_2)^{(n)}$, allora $D(q) \cap D(z) = W_q$ è ancora un aperto di $(t_1 \cap t_2)^{(n)}$. Infine, essendo $W_q \cap (A^n - B)$ contenuto in S per ogni $q \in S$, si avrà $\bigcap_{q \in S} W_q \subseteq B$; e, poiché A è finito, $\bigcap_{q \in S} W_q \in (t_1 \cap t_2)^{(n)}$. Dal momento che $z \in \bigcap_{q \in S} W_q$ ed il precedente ragionamento può essere ripetuto per ogni elemento z di B e per ogni aperto B di $t_1^{(n)} \cap t_2^{(n)}$, si ottiene pertanto $t_1^{(n)} \cap t_2^{(n)} \subseteq \subseteq (t_1 \cap t_2)^{(n)}$; è così provata la sufficienza della condizione.

Dimostriamo ora che la condizione è anche necessaria; a tale scopo supponiamo che A sia un insieme che riterremo senz'altro dotato di un buon ordinamento, di cardinalità maggiore o uguale al numerabile e proviamo che esistono $t_1, t_2 \in T_A$ ed un intero positivo n tali che $(t_1 \cap t_2)^{(n)} \neq t_1^{(n)} \cap t_2^{(n)}$. Sia X un segmento iniziale di A di lunghezza ω e sia $f: Q \rightarrow X$ una biezione dell'insieme dei numeri razionali su X. Se $p, q \in X$, definiamo una funzione $\delta : X^2 \rightarrow R^+$ nel modo seguente $\delta(p, q) = |f^{-1}(p) - - f^{-1}(q)|$. Allora δ è evidentemente una metrica su X. Sia F_1 la famiglia di sottinsiemi di A costituita dall'unione delle seguenti famiglie di sottinsiemi: *i sottinsiemi di* $f(Q^-)$ *tali che differiscano da* $f(Q^-)$ *solo per un numero finito di elementi*; *la famiglia di tutti i sottinsiemi di* $f(Q^+)$; *la famiglia ridotta al solo* A. Allora F_1 è una base per una topologia t_1 su A. Sia F_2 la famiglia costituita da *tutti i sottinsiemi del tipo* $f(\{z \in Q : x < z < y\})$ *per ogni* $x, y \in Q$ *tali che* $x < y$ *e da* A. Allora F_2 è pure una base per una topologia t_2 su A, che, ristretta ad X, è l'immagine, tramite la f, della topologia euclidea su Q.

La topologia t_1 gode evidentemente della seguente proprietà:

(2.5) *se* $C \in t_1$ *e* $C \cap f(Q^-) \neq \varnothing$, *allora, se* $p \notin C$ *e* $p \in f(Q^-)$, *per ogni* r *in* $R^+ - \{0\}$ *esiste un* $q \in C$ *tale che* $\delta(p, q) < r$.

Dimostriamo allora che esiste un sottinsieme di A^2 tale ch'esso appartenga a $t_1^{(2)} \cap t_2^{(2)}$ ma non a $(t_1 \cap t_2)^{(2)}$. Sia S il sottinsieme di A^2 definito come $\{(f(x), f(y)) : x < 0, 0 < y \text{ e } x \neq -y\}$; allora $S \in t_1^{(2)}$, in quanto $S = \bigcup_{y \in Q^+ - \{0\}} (\{p \in f(Q^-) : p \neq f(y)\} \times \{f(y)\})$. D'altro canto $S \in t_2^{(2)}$, perché il sottoinsieme $\{(x, y) \in Q^2 : (f(x), f(y)) \in S\}$ è aperto nella topologia euclidea prodotto su Q^2. Ne consegue allora che $S \in t_1^{(2)} \cap t_2^{(2)}$.

Se S appartenesse a $(t_1 \cap t_2)^{(2)}$, per ogni $s = (s_1, s_2) \in S$, dovrebbero esistere V_1 e V_2 aperti in $t_1 \cap t_2$ tali che $s \in V_1 \times V_2 \subseteq S$. Dal modo in cui è stato costruito S si ha che $s_1 \in f(Q^-)$ e quindi $V_1 \cap f(Q^-) \neq \varnothing$. Per ipotesi $V_1 \in t_1$; pertanto esisterà $L \in F_1$ tale che $L \subseteq f(Q^-)$, $L \subseteq V_1$ ed $s_1 \in L$. Se $(f(-f^{-1}(s_2)), s_2) \in V_1 \times V_2$, allora risulta $V_1 \times V_2 \cap (A^2 - S) \neq \varnothing$, e ciò contrasta con l'ipotesi $V_1 \times V_2 \subseteq S$. Supponiamo quindi che sia $(f(-f^{-1}(s_2)), s_2) \notin$ $\notin V_1 \times V_2$; allora otteniamo che $f(-f^{-1}(s_2)) \in f(Q^-) - V_1$ ed $f(-f^{-1}(s_2)) \notin L$. Poiché $V_2 \in t_2$, esiste un intero positivo k tale che $\{y \in A : \delta(y, s_2) <$ $< 1/k\} \subseteq V_2$; quindi $L \times \{y \in A : \delta(y, s_2) < 1/k\} \subseteq V_1 \times V_2$. Per la (2.5) esiste $z_0 \in L$ tale che $\delta(f(-f^{-1}(s_2)), z_0) < 1/k$, per cui si ottiene che $f(-f^{-1}(z_0)) \in V_2$ e dunque $(z_0, f(-f^{-1}(z_0))) \in V_1 \times V_2$. Ne consegue allora che $V_1 \times V_2 \cap (A^2 - S) \neq \varnothing$ e ciò è ancora in contrasto con l'ipotesi $V_1 \times V_2 \subseteq S$. Pertanto $S \notin (t_1 \cap t_2)^{(2)}$, onde l'asserto.

Dalla Proposizione IV, che dà una condizione necessaria e sufficiente per invertire l'inclusione della (2.2), si ottiene facilmente e completamente l'asserto della Proposizione II.

Osserviamo inoltre che la Proposizione IV porta ad affermare che, data un'algebra $\mathfrak{A}$, se t_1 e t_2 sono topologie compatibili con la struttura di $\mathfrak{A}$, allora, in generale, $t_1 \cap t_2$ non lo è, a meno che $\mathfrak{A}$ non sia finita.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. DUGUNDJI (1968) – *Topology*, Allyn and Bacon.

[2] M. E. RUDIN (1971) – *The box topology*, « Proc. Univ. Houston ».

[3] M. FATTOROSI-BARNABA e L. MAMONE (1976) – *Proprietà reticolari di certe classi di topologie*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *60*. (Giugno).

[4] A. K. STEINER (1966) – *The lattice of topologies: structure and complementation*, « Trans. Am. Math. Soc. ».

[5] L. A. STEEN e J. A. SEEBACH (1970) – *Counterexamples in topology*, Holt, Rinehart and Winston.

[6] P. CRAWLEY e R. P. DILWORTH (1973) – *Algebraic theory of lattices*, Prentice Hall.

[7] G. MUNI (1969) – *Topologie iniziali e finali compatibili con leggi di composizione interne ed esterne*. « Ricerche di Matematica », Napoli.