Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Umberto Bartocci, Giuseppe De Cecco

Generalizzazione del concetto di traccia di un endomorfismo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **62** (1977), n.2, p. 115–121.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_2_115_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1977.

Algebra. — *Generalizzazione del concetto di traccia di un endomorfismo* (*). Nota I di UMBERTO BARTOCCI e GIUSEPPE DE CECCO, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this Note I we propose, by means of the Grothendieck group K_0, an intrinsic definition of the trace of a vector space endomorphism, particularly convenient in the infinite dimensional case. The following Note II will then establish the connection of our definition with other ones given by different Authors.

Lo scopo principale di questo lavoro è quello di presentare sotto forma unitaria le definizioni che più di frequente si incontrano nella letteratura (vedi in seguito) quando si voglia estendere ad endomorfismi di spazi vettoriali di dimensione infinita l'ordinaria nozione di traccia nota per il caso di matrici ed endomorfismi di spazi vettoriali in dimensione finita. Viene così anche dato un contributo al problema della *caratterizzazione* del concetto di traccia. Considerata una categoria *ammissibile* $\mathscr{C}$ di endomorfismi, il problema dell'esistenza e dell'unicità di una traccia su $\mathscr{C}$ viene ricondotto al calcolo della dimensione dello spazio vettoriale $\overline{K_0(\mathscr{C})}$, «*vettorializzato*» del gruppo di Grothendieck di $\mathscr{C}$.

Applicazioni della nozione di traccia generalizzata si hanno ad esempio nella teoria dei punti fissi, quando si estende il teorema di Lefschetz–Hopf al caso di spazi topologici che hanno gruppi di omologia o coomologia non finitamente generati (cfr. la Bibliografia posta alla fine della presente Nota I).

Dopo aver ricordato la nozione classica di traccia ed alcune sue caratterizzazioni, si indicano alcune generalizzazioni note e si fanno osservazioni particolarmente utili allo scopo di giustificare la definizione generale di traccia che viene quindi data.

Nella successiva Nota II effettueremo il confronto della nostra definizione con quelle precedentemente date, le quali verranno studiate in modo più approfondito del consueto. Mostreremo infine il legame che intercorre tra la traccia e gli autovalori dell'endomorfismo, pervenendo così ad un'altra descrizione della traccia (cosiddetta *spettrale*) che è quella più naturale e che comprende tutte le altre.

Gli Autori avvertono che nell'accennata Bibliografia figurano anche alcuni lavori che si occupano della traccia da un punto di vista diverso da quello esclusivamente algebrico che qui viene trattato (cfr. ad esempio [1] (1), caso degli spazi vettoriali topologici, e [15], che usa una generalizzazione della

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1977.

(1) I numeri tra [ ] rinviano alla Bibliografia posta alla fine della presente Nota I.

teoria della metrica al caso di una categoria). Desiderano da ultimo ringraziare i prof. Giuliana Palmieri e Nicolae Teleman per le fruttuose discussioni e gli utili suggerimenti ricevuti durante la compilazione del presente lavoro.

I. La traccia classica e le sue generalizzazioni

1) Fissato un corpo commutativo F algebricamente chiuso [2], i cui elementi denoteremo con $a, b, \ldots$, indicheremo: con $V, W, \ldots$ spazi vettoriali (di dimensione finita o non) definiti su F; con $f, g, \ldots$ omomorfismi di F–spazi vettoriali in generale. Conveniamo inoltre di rappresentare con ι_V l'endomorfismo identità di V.

2) Se la dimensione di V è finita, è ben noto che si può definire, per ogni endomorfismo α di V, uno scalare elemento di F detto *traccia* di α, in simboli $\mathrm{Tr}(\alpha)$. L'applicazione

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{End}(V) \to F$$

è *caratterizzata* dalle seguenti proprietà (cfr. ad esempio [7]):

$$\mathrm{Tr}(a\alpha + b\beta) = a\,\mathrm{Tr}(\alpha) + b\,\mathrm{Tr}(\beta) \tag{2.1}$$

$$\mathrm{Tr}(\alpha\beta) = \mathrm{Tr}(\beta\alpha) \tag{2.2}$$

$$\mathrm{Tr}(\iota_V) = \dim(V)\,. \tag{2.3}$$

3) È altresì ben noto [3] che l'applicazione Tr può essere definita al seguente modo. Detto V^* lo spazio duale di V ed $f : V^* \otimes_F V \to \mathrm{End}(V)$ l'isomorfismo canonico tra i due spazi indicati, risulta

$$\mathrm{Tr} = g \cdot f^{-1} \tag{3.1}$$

ove $g : V^* \otimes_F V \to F$ è la cosiddetta applicazione *valutazione*, definita dalla $g(v^* \otimes v) = v^*(v)$.

4) La traccia risulta ancora caratterizzata attraverso la seguente considerazione [4]. Posto $n = \dim(V)$ $(n \geq 1)$, e fissata comunque una n–forma alternante non nulla $\Delta : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ volte}} \to F$ risulta

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta(v_1, \ldots, \alpha(v_i), \ldots, v_n) = \mathrm{Tr}(\alpha)\,\Delta(v_1, \ldots, v_n)\,. \tag{4.1}$$

(2) Molte delle argomentazioni che seguono valgono anche per un campo F non algebricamente chiuso.

(3) Cfr. ad esempio N. Bourbaki [3], cap. 2, § 4.

(4) Cfr. ad esempio W. H. Greub [10], cap. IV, § 7.

5) Nel caso che V abbia dimensione infinita, la caratterizzazione (3.1) consente di definire la traccia per particolari endomorfismi di V. Invero [5], l'applicazione naturale f risulta in questo caso essere un monomorfismo, ed $\mathrm{Im}(f)$ costituita da quegli endomorfismi $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ tali che $\dim(\mathrm{Im}\,\alpha)$ sia finita (siffatti endomorfismi diconsi di *rango finito*). Si può allora definire (fermo restando il significato dei simboli precedentemente introdotti)

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{f^{-1}} V^* \otimes_F V \xrightarrow{g} F\,, \tag{5.1}$$

ed è chiaro che la traccia così definita per gli endomorfismi α di V di rango finito soddisfa alla seguente identità:

$$\mathrm{Tr}(\alpha) = \mathrm{Tr}(\alpha \mid \mathrm{Im}\,\alpha)\,. \tag{5.2}$$

Inoltre si vede facilmente che essa soddisfa alle condizioni (2.1) e (2.2), e che, per quanto riguarda invece la condizione (2.3), risulta ovviamente $\iota_V \in \mathrm{Im}(f)$ se e soltanto se V ha dimensione finita.

6) La definizione appena data è suscettibile di ulteriore generalizzazione [6]. Posto $N(\alpha) = \bigcup_{n\geq 1} \mathrm{Ker}(\alpha^n)$, diciamo che α è un *endomorfismo di Leray* se lo spazio vettoriale $\tilde{V}_\alpha = V/N(\alpha)$ ha dimensione finita. Indicato con $\mathrm{End}_L(V) \subseteq \mathrm{End}(V)$ il sottoinsieme degli endomorfismi di Leray di V, possiamo definire un'applicazione $\mathrm{Tr}_L : \mathrm{End}_L(V) \to F$ (che diciamo *traccia di Leray*) al seguente modo:

$$\mathrm{Tr}_L(\alpha) = \mathrm{Tr}(\tilde{\alpha}) \tag{6.1}$$

ove $\tilde{\alpha} : \tilde{V}_\alpha \to \tilde{V}_\alpha$ è l'omomorfismo indotta da α (e Tr è ovviamente la traccia classica per endomorfismi in dimensione finita [7]).

È chiaro che se α è un endomorfismo di rango finito allora α è anche un endomorfismo di Leray e risulta $\mathrm{Tr}(\alpha) = \mathrm{Tr}_L(\alpha)$. Inoltre, se la dimensione di V è infinita, non è possibile definire la traccia di Leray di un automorfismo di V (in particolare di ι_V). Osserviamo poi che $\mathrm{End}_L(V)$ non è un sottospazio vettoriale di End (V) (nel caso di dimensione infinita!), in quanto, se $\alpha, \beta \in \mathrm{End}_L(V)$, in generale $\alpha + \beta$ non è elemento di $\mathrm{End}_L(V)$, come è facile verificare.

Relativamente alla traccia di Leray, sussistono però le seguenti proprietà (cfr. loc. cit.):

(6.2) PROPOSIZIONE. *Se* α, β *sono elementi di* $\mathrm{End}_L(V)$ *tali che* $\alpha\beta$ *sia pure elemento di* $\mathrm{End}_L(V)$, *allora necessariamente* $\beta\alpha \in \mathrm{End}_L(V)$ *e risulta* $\mathrm{Tr}_L(\alpha\beta) = \mathrm{Tr}_L(\beta\alpha)$.

(5) Cfr. ad esempio A. DOLD [4], p. 208.

(6) Cfr. J. LERAY [17].

(7) È ovvio che non si guadagna in generalità supponendo $\tilde{\alpha}$ soltanto di rango finito. Invero $\tilde{\alpha}$ è di rango finito se, e soltanto se, $\dim(\tilde{V}_\alpha)$ è finita, poiché $\tilde{\alpha}$ è iniettiva!

(6.3) PROPOSIZIONE *Consideriamo il seguente diagramma commutativo con righe esatte:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha''} & & \\ 0 & \longrightarrow & V' & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & V'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(*che diremo una successione esatta di endomorfismi, in simboli* $0 \to \alpha' \to \alpha \to \to \alpha'' \to 0$). *Se* α *è un endomorfismo di Leray, oppure sono tali* α' *ed* α'', *allora* $\alpha, \alpha', \alpha''$ *sono tutti endomorfismi di Leray e sussiste l'identità* $\mathrm{Tr}_L(\alpha) = = \mathrm{Tr}_L(\alpha') + \mathrm{Tr}_L(\alpha'')$.

II. UNA NUOVA DEFINIZIONE GENERALE DI TRACCIA

1) Indichiamo con $A = F[x]$ l'anello dei polinomi in una indeterminata x e a coefficienti in F. Denotiamo con $\mathcal{M}$ la categoria di tutti gli A–moduli e con $\mathcal{F}$ la sottocategoria (piena) di $\mathcal{M}$, i cui oggetti sono quegli A–moduli M tali che $\dim_F(M)$ è finita. Dato $a \in F$, indichiamo con $S_a : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ il funtore « restrizione degli scalari » indotto dall'omotetia di rapporto a, $\theta_a : A \to A$.

2) Sia ora $\mathcal{C}$ una qualsiasi sottocategoria (piena) di $\mathcal{M}$. Diremo che $\mathcal{C}$ è *ammissibile* (per una teoria della traccia) se soddisfa alle condizioni seguenti:

(2.1) se $M \in Ob\,\mathcal{C}$, allora anche $S_a(M) \in Ob\,\mathcal{C}$, $\forall\, a \in F$,

(2.2) se $M \in Ob\,\mathcal{C}$ ed M' è un sottomodulo di M, allora anche $M' \in Ob\,\mathcal{C}$,

(2.3) per ogni successione esatta di A–moduli $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, l'appartenenza a $\mathcal{C}$ di due elementi della successione implica l'appartenenza a $\mathcal{C}$ anche del rimanente elemento.

In particolare, una categoria ammissibile $\mathcal{C}$ risulta chiusa rispetto al quoziente ed alle somme dirette (finite), ed in più, se N è un A–modulo isomorfo ad un oggetto di $\mathcal{C}$, allora N stesso è in $\mathcal{C}$. Una categoria ammissibile risulta poi abeliana.

Una categoria $\mathcal{C}$ ammissibile sarà detta *propriamente ammissibile* se contiene $\mathcal{F}$.

Ovviamente $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{M}$ sono categorie propriamente ammissibili. Daremo nel seguito altre esempi di siffatte categorie.

3) Diciamo poi che un gruppo abeliano G possiede una struttura di F-*gruppo* quando esso sia dotato di un omomorfismo di semigruppi moltiplicativi $\theta : F \to \mathrm{End}(G)$, che mantenga l'unità (ma non necessariamente lo zero).

Se G è un F–gruppo, porremo $\theta(a)(g) = a \cdot g \, (\forall a \in F, \forall g \in G)$. È chiaro allora che un F–gruppo è caratterizzato dall'operazione «·» soddisfacente alle seguenti proprietà:

$$a \cdot (g + g') = a \cdot g + a \cdot g' \tag{3.1}$$

$$a \cdot (b \cdot g) = (ab) \cdot g \qquad \forall a, b \in F \quad \forall g, g' \in G \tag{3.2}$$

$$1 \cdot g = g. \tag{3.3}$$

Un morfismo $T : G \to H$ di F–gruppi è un morfismo di gruppi abeliani tale che $T(a \cdot g) = a \cdot T(g)$, $\forall a \in F$ e $\forall g \in G$.

4) Detto G un F–gruppo qualsiasi, denotiamo con G_0 l'F–sottogruppo di G generato da tutti gli elementi del tipo $a \cdot g + b \cdot g - (a + b) \cdot g$, $\forall a, b \in F$, $\forall g \in G$. È chiaro che l'F–gruppo quoziente $\bar{G} = G/G_0$ possiede una struttura naturale di spazio vettoriale sopra F, e che la corrispondenza $G \to \bar{G}$ definisce un funtore tra la categoria $\mathscr{G}$ degli F–gruppi e quella $\mathscr{V}$ degli F–spazi vettoriali (che identifichiamo a quella sottocategoria piena di $\mathscr{G}$ costituita da quegli F–gruppi G tali che risulti $G_0 = 0$). Chiameremo $\bar{G}$ il *vettorializzato* di G. È evidente che il funtore $G \to \bar{G}$ è un aggiunto a sinistra dell'inclusione $\mathscr{V} \hookrightarrow \mathscr{G}$, in quanto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(G, H)$ ed $\mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(\bar{G}, H)$ sono naturalmente isomorfi come F–spazi vettoriali [(8)], $\forall G \in Ob\,\mathscr{G}$, $\forall H \in Ob\,\mathscr{V}$. Osserviamo esplicitamente da ultimo che G è isomorfo a $\bar{G} \oplus G_0$, come è immediato provare.

5) Ciò premesso, fissata una categoria ammissibile $\mathscr{C}$, indichiamo con $G = K_0(\mathscr{C})$ il *gruppo di Grothendieck* [(9)] di $\mathscr{C}$, vale a dire, il sottogruppo abeliano libero generato dalle classi di isomorfismo degli oggetti di $\mathscr{C}$ modulo il sottogruppo generato dalle relazioni $M - M' - M''$, una per ogni successione esatta $O \to M' \to M \to M'' \to O$ in $\mathscr{C}$ (identifichiamo nei simboli un elemento di $\mathscr{C}$ con la sua classe di isomorfismo). Denoteremo con [M] la classe di M in G.

Poiché il funtore restrizione degli scalari S_a è un funtore esatto, ha senso definire in G la seguente moltiplicazione con elementi di F:

$$a \cdot [M] = [S_a(M)] \; {}^{(10)} \tag{5.1}$$

la quale verifica, come è immediato dimostrare, gli assiomi (3.1), (3.2), (3.3) di questo paragrafo [(11)]. Pertanto G risulta un F–gruppo.

(8) È chiaro che, $\forall G, G' \in Ob\,\mathscr{G}$, l'insieme $U = \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(G, G')$ ha una struttura naturale di F–gruppo, e che, se $G' \in Ob\,\mathscr{V}$, allora anche $U \in Ob\,\mathscr{V}$.

(9) Cfr. ad esempio H. BASS [2], cap. VIII. Non è da confondere questa definizione con quella del cap. VII. Infatti non ogni successione esatta si scinde.

(10) In virtù della condizione (2.1), $S_\alpha(M)$ è un elemento di $Ob\,\mathscr{C}$.

(11) Non indicheremo esplicitamente il paragrafo se la citazione viene fatta nell'ambito dello stesso paragrafo.

Siamo ora in grado di dare la seguente

(5.2) DEFINIZIONE GENERALE DI TRACCIA: *Dicesi traccia definita sulla categoria ammissibile* $\mathscr{C}$ *ogni omomorfismo non nullo di* F*-gruppi* $T : K_0(\mathscr{C}) \to F$.

Se $\mathscr{C}$ *è per di più propriamente ammissibile, diremo che una traccia* T *su* $\mathscr{C}$ *è normalizzata* (12) *se essa soddisfa alla condizione* $T([A/(x-1)A]) = 1$.

6) Il significato della definizione appena data resta chiarito quando si tenga presente che la categoria $\mathscr{M}$ e quella $\mathscr{E}$ costituita da tutti gli endomorfismi degli spazi vettoriali definiti sopra F sono, come ben noto, isomorfe (13). Basta associare ad un endomorfismo α dello spazio vettoriale V l'A-modulo M che ha come gruppo abeliano sostegno lo stesso V e dove il prodotto degli elementi di A per quelli di M resta definito dalla $xv = \alpha(v)$, $\forall v \in V$. Viceversa, ad $M \in Ob\, \mathscr{M}$, si associa l'endomorfismo dello spazio vettoriale costituito da M stesso (come spazio vettoriale sopra F) definito dalla $\alpha(m) = xm$, $\forall m \in M$ (α coincide cioè con l'omotetia di rapporto x in M). Quindi la traccia per una categoria ammissibile di endomorfismi viene definita come una applicazione $T \neq 0$, che associa ad ogni endomorfismo un elemento di F, soddisfacente alle due seguenti condizioni:

(6.1) per ogni successione esatta di endomorfismi $0 \to \alpha' \to \alpha \to \alpha'' \to 0$, risulta $T(\alpha) = T(\alpha') + T(\alpha'')$;

(6.2) $T(a\alpha) = a\,T(\alpha) \qquad \forall a \in F$.

A queste due condizioni si può aggiungere la

(6.3) $$T(\iota_F) = 1$$

che chiameremo la condizione di *normalizzazione* (l'A-modulo $A/(x-1)A$ corrisponde all'endomorfismo identità dello spazio vettoriale F).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. F. ATIYAH and R. BOTT (1967) - *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes*: I, «Ann. of Math.», *86*, 374-407; (1968) - II. *Applications*, «Ann. of Math.», *87*, 451-491.

[2] H. BASS (1968) - *Algebraic* K-*Theory*, Benjamin Inc., New York.

[3] N. BOURBAKI (1962) - *Algèbre*, II, Hermann, Paris.

[4] A. DOLD (1972) - *Lectures on Algebraic Topology*, Springer.

[5] A. DOLD (1972) - K-*Theory of Non-Additive Functors of Finite Degree*. «Math. Ann.», *196*, 177-197.

(12) È chiaro che $A/(x-1)A$ appartiene ad $Ob\,\mathscr{C}$ poiché esso appartiene ad $Ob\,\mathscr{F}$.

(13) Cfr. ad esempio S. MACLANE e G. BIRKOFF [14], II, p. 14. Un morfismo $f : \alpha \to \beta$ tra un endomorfismo α di uno spazio V ed un endomorfismo β di uno spazio W è un omomorfismo di V in W tale che il diagramma seguente risulti commutativo: $\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$.

[6] A. DOLD (1975) – *Teoria dei punti fissi*, Lezioni raccolte da G. De Cecco, Quaderno C.N.R., Heidelberg.

[7] R. GODEMENT (1963) – *Cours d'algèbre*, Hermann, Paris.

[8] I. C. GOHBERG and M. G. KREIN (1963) – *The basic propositions on defect numbers, root number and indices of linear operators*. « Am. Math. Soc. Trasl. », Serie 2, *13*, 185–264.

[9] A. GRANAS (1972) – *The Leray–Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANRs*, « Bull. Soc. Math. France », *100*, 209–228.

[10] W. H. GREUB (1967) – *Linear Algebra*, Springer.

[11] E. HELLINGER and O. TOEPLITZ (1910) – *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen*, « Math. Ann. », *69*, 289–330.

[12] C. HOUZEL (1973) – *Espaces analitiques relatifs et théorème de finitude*, « Math Ann. », *205*, 13–54.

[13] I. KAPLANSKY (1969) – *Infinite Abelian Groups*, « Ann. Arbor, Un. Mich. Press. ».

[14] S. MACLANE and G. BIRKHOFF (1971) – *Algèbre*, I, II, Gauthier–Villars, Paris.

[15] F. W. LAWVERE (1973) – *Metric spaces, generalized logic, and closed categories*, « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano », XLIII.

[16] S. LEFSCHETZ (1965) – *Topology*, « Chelsea Pub. Comp. », New York.

[17] J. LERAY (1959) – *Theorie des points fixes: indice total et nombre de Lefschetz*, « Bull. Soc. Math. France », *87*, 221–233.