
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

CATALDO AGOSTINELLI

**Su una soluzione particolare del problema del moto
di un corpo rigido asimmetrico in un campo di forze
newtoniane**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 62 (1977), n.1, p. 36–44.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1977_8_62_1_36_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Su una soluzione particolare del problema del moto di un corpo rigido asimmetrico in un campo di forze newtoniane.*
Nota (*) del Socio CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — In this paper the Author considers the motion of an asymmetric rigid body about a fixed point in a newtonian field of forces, in the only hypothesis that the centre of mass belongs to a principal axis of inertia relative to the fixed point. He gives new particular solutions of the equations of the motion in which the squares of the equatorial components p, q of the angular velocity are functions of second degree in the component r about the baricentral axis. The discovered solution depends on three arbitrary constants and this defines a system of ∞^3 possible motions.

1. INTRODUZIONE

Da alcuni Autori russi ⁽¹⁾ è stato considerato il problema del moto di un corpo rigido intorno a un punto fisso nel caso in cui esso sia attratto con la legge di Newton da un corpo puntiforme stazionario a distanza R sufficientemente grande da poter trascurare i termini dell'attrazione di ordine superiore ad $1/R^3$.

Della questione si sono occupati anche alcuni studiosi italiani dal punto di vista dei moti di precessione generalizzati ⁽²⁾.

Il solo caso interessante in cui è possibile integrare mediante quadrature le equazioni del moto di questo problema è quello in cui il corpo, ha struttura giroscopica intorno a un asse principale d'inerzia relativo al punto fisso e il baricentro appartiene a quest'asse, caso analogo a quello lagrangiano per il moto di un corpo rigido semplicemente pesante.

Ora in questa Nota ho pensato di trovare, nel caso più generale di un corpo a struttura asimmetrica intorno a un punto fisso, col baricentro appartenente a uno degli assi principali d'inerzia relativi a questo punto, una soluzione in cui i quadrati delle componenti equatoriali p, q della velocità angolare di rotazione, siano esprimibili mediante polinomi nella terza componente r . Questa idea, da me già utilizzata in un precedente lavoro ⁽³⁾, mi ha condotto

(*) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1977.

(1) V. V. BELETSKII, *On integrability of equations of motion of a solid body about a fixed point under the influence of a central newtonian field of forces*. «Dokl. Akad. Nauk SSSR», 113 (2), 1957. I. U. H. ARKHANGEL'SKII, *On single-valued integrals in the problem of motion of a solid body in a newtonian field of forces*, «Y. Appl. Math. Mech.», 26 (3), 1962.

(2) E. BENTSİK, *Su un tipo di precessioni regolari per un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze newtoniane*. «Rend. Sem. Matem. Padova», vol. XLI (1968).

R. BALLI, *Sulle precessioni generalizzate di un solido con un punto fisso soggetto a forze di tipo newtoniano*. «Sem. Mat. Univ. Torino», (1974).

(3) C. AGOSTINELLI, *Sopra alcuni integrali particolari delle equazioni del moto di un corpo rigido pesante intorno a un punto fisso*. «Act. P. Acad. Sc. Nov. Lync.», Anno LXXXVII-II Sess.

effettivamente a una nuova soluzione del problema in cui i quadrati delle componenti $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ della velocità angolare sono funzioni di 2° grado in $\mathbf{r}$, due dei coseni direttori della congiungente il punto fisso col centro attrante sono proporzionali a $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, il terzo coseno direttore è lineare in $\mathbf{r}$ e il tempo è fornito in funzione di $\mathbf{r}$ da una quadratura ellittica. Dopo ciò gli angoli di Eulero che la terna di assi principali d'inerzia relativa al punto fisso forma con una terna di assi di direzione invariabile, risultano immediatamente determinati. La soluzione ottenuta contiene tre costanti arbitrarie e cioè: la costante dell'energia, il valore iniziale dell'angolo di pressione e la costante temporale. Essa dà quindi luogo a un sistema ∞^3 di moti possibili.

2. EQUAZIONI DEL MOTO

Essendo $\mathbf{Q}$ il centro stazionario attraente, di massa m , $\mathbf{O}$ il punto fisso del solido $\mathbf{S}$, $\mathbf{R}$ la distanza $\mathbf{OQ}$, $\mathbf{P}$ un punto generico di $\mathbf{S}$, $\mathbf{r}$ la distanza $\mathbf{QP}$, δ la distanza $\mathbf{OP}$, e γ l'angolo formato da $\mathbf{OP}$ con $\mathbf{OQ}$, si ha

$$(2.1) \quad r = R \left\{ 1 + \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 - 2 \frac{\delta}{R} \cos \gamma \right\}^{1/2}$$

e il momento $\mathbf{M}$ rispetto ad $\mathbf{O}$ dell'azione newtoniana esercitata dal centro $\mathbf{Q}$ sul corpo $\mathbf{S}$ risulta

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{M} &= -fm \int_{\mathbf{S}} \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{Q})}{r^3} \rho dS = \\ &= -fm (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) \wedge \int_{\mathbf{S}} \frac{\mathbf{P} - \mathbf{O}}{r^3} \rho dS, \end{aligned}$$

dove f è la costante di attrazione universale, e ρ è la densità del solido in $\mathbf{P}$.

Dalla (2.1) si ricava (essendo $\delta/R \ll 1$),

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} \left\{ 1 + 3 \frac{\delta}{R} \cos \gamma - \frac{3}{2} \frac{\delta^2}{R^2} (1 - 5 \cos^2 \gamma) + \dots \right\},$$

e quindi, indicando con χ il versore del vettore $\mathbf{Q} - \mathbf{O}$, ponendo cioè $\mathbf{Q} - \mathbf{O} = R\chi$, si ha

$$\int_{\mathbf{S}} \frac{\mathbf{P} - \mathbf{O}}{r^3} \rho dS = \frac{1}{R^3} \left\{ \int_{\mathbf{S}} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \rho dS + \frac{3}{R} \int_{\mathbf{S}} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times \chi \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \rho dS + \dots \right\}.$$

Ma indicando con $\mathbf{G}$ il baricentro del corpo $\mathbf{S}$, con μ la sua massa, con σ l'omografia di inerzia ed $\mathbf{I}_0$ il momento d'inerzia rispetto ad $\mathbf{O}$, risulta

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{S}} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \rho dS &= \mu (\mathbf{G} - \mathbf{O}), \\ \int_{\mathbf{S}} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \times \chi (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \rho dS &= (\mathbf{I}_0 - \sigma) \chi, \end{aligned}$$

perciò fino ai termini di terzo ordine in $1/R$ la (2.2) porge

$$\mathbf{M} = \frac{fm \mu}{R^2} (\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge \chi + \frac{3 fm}{R^3} \chi \wedge \sigma \chi.$$

Infine, essendo $\mathbf{K}$ il momento della quantità di moto del solido rispetto ad $\mathbf{O}$, l'equazione del moto intorno ad $\mathbf{O}$ risulta

$$(2.3) \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = P (\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge \chi + \frac{3 P}{\mu R} \chi \wedge \sigma \chi.$$

dove $P = fm \mu / R^2$ è il peso del solido.

Da questa equazione vettoriale, indicando con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i coseni direttori di χ rispetto agli assi principali d'inerzia x, y, z del solido relativi ad $\mathbf{O}$, e con x_0, y_0, z_0 le coordinate del baricentro $\mathbf{G}$ rispetto agli stessi assi, seguono le seguenti equazioni euleriane

$$(2.4) \quad \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} - (B - C) qr &= P (y_0 \gamma_3 - x_0 \gamma_2) - \frac{3 P}{\mu R} (B - C) \gamma_2 \gamma_3, \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A) rp &= P (z_0 \gamma_1 - x_0 \gamma_3) - \frac{3 P}{\mu R} (C - A) \gamma_3 \gamma_1, \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B) pq &= P (x_0 \gamma_2 - y_0 \gamma_1) - \frac{3 P}{\mu R} (A - B) \gamma_1 \gamma_2, \end{aligned}$$

alle quali vanno associate le equazioni di Poisson

$$(2.5) \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p.$$

Queste equazioni, che si riducono a quelle del moto di un corpo rigido pesante intorno a un punto fisso, quando si trascurino gli ultimi termini delle equazioni (2.4), ammettono l'integrale dell'energia

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - P (x_0 \gamma_1 + y_0 \gamma_2 + z_0 \gamma_3) + \\ + \frac{3 P}{2 \mu R} (A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) = E (\text{cost.}), \end{aligned}$$

e l'integrale del momento scalare della quantità di moto

$$(2.7) \quad Ap \gamma_1 + Bq \gamma_2 + Cr \gamma_3 = K_0 (\text{cost.}),$$

oltre l'integrale dei coseni direttori

$$(2.8) \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

3. SOLUZIONE PARTICOLARE

Oltre gli integrali precedenti le equazioni (2.4) e (2.5) non ne ammettono altri, salvo per particolari strutture del solido intorno al punto fisso. Quindi in generale il sistema (2.4), (2.5) non è integrabile in termini finiti.

In questa Nota mi propongo dimostrare ed esporre esplicitamente l'esistenza di una soluzione particolare di quelle equazioni, che ritengo nuova, nella sola ipotesi che il baricentro del solido appartenga a uno degli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso, mentre la struttura intorno a questo punto è del tutto asimmetrica.

Assumendo come asse baricentrale l'asse principale d'inerzia z , supponendo cioè $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 > 0$, e ponendo per semplicità

$$(3.1) \quad a = (B - C)/A, \quad b = (C - A)/B, \quad c = (A - B)/C; \\ \nu = 3(B - C)/(Rz_0 \mu),$$

dove ν è un parametro adimensionale costante, le equazioni (2.4) si riducono alle seguenti

$$(3.2) \quad \frac{dp}{dt} = aqr - \frac{Pz_0}{A} (1 + \nu \gamma_3) \gamma_2 \\ \frac{dq}{dt} = brp + \frac{Pz_0}{B} \left(1 - \nu \frac{C - A}{B - C} \gamma_3 \right) \gamma_1 \\ \frac{dr}{dt} = cpq - \nu \frac{Pz_0}{C} \frac{A - B}{B - C} \gamma_1 \gamma_2.$$

Supponiamo che delle equazioni (3.2), (2.5) esistono degli integrali particolari della forma

$$F_1 = p^2 - f_1(r) = 0, \quad F_2 = q^2 - f_2(r) = 0,$$

con f_1, f_2 polinomi in r .

Tenendo conto delle (3.2) dovremo avere identicamente

$$p \frac{dp}{dt} - \frac{1}{2} \frac{df_1}{dr} \frac{dr}{dt} = 0, \quad q \frac{dq}{dt} - \frac{1}{2} \frac{df_2}{dr} \frac{dr}{dt} = 0,$$

cioè

$$p \left\{ aqr - \frac{Pz_0}{A} (1 + \nu \gamma_3) \gamma_2 \right\} = \frac{1}{2} \frac{df_1}{dr} \left(cpq - \frac{\nu Pz_0}{C} \frac{A - B}{B - C} \gamma_1 \gamma_2 \right) \\ q \left\{ brp + \frac{Pz_0}{B} \left(1 - \nu \frac{C - A}{B - C} \gamma_3 \right) \gamma_1 \right\} = \frac{1}{2} \frac{df_2}{dr} \left(cpq - \frac{\nu Pz_0}{C} \frac{A - B}{B - C} \gamma_1 \gamma_2 \right).$$

I primi membri di queste relazioni, che dovranno risultare delle identità, sono rispettivamente divisibili per p e q . Altrettanto dovrà avvenire dei secondi membri, e questo richiede che γ_1 e γ_2 siano della forma

$$(3.3) \quad \gamma_1 = p\varphi_1(r) \quad , \quad \gamma_2 = q\varphi_2(r) ,$$

con φ_1, φ_2 polinomi in r .

In questo caso la terza delle (3.2) porge

$$(3.4) \quad pq = \frac{dr}{dt} / c \left(1 - v \frac{Pz_0}{B-C} \varphi_1 \varphi_2 \right) ,$$

e la terza delle (2.5) diventa

$$(3.5) \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{dr}{dt} / c \left(1 - v \frac{Pz_0}{B-C} \varphi_1 \varphi_2 \right) .$$

Affinché integrando questa equazione si abbia per γ_3 un'espressione intera in r , il grado del denominatore rispetto ad r non potrà superare quella del denominatore. Ne segue che una delle funzioni φ_1, φ_2 deve essere uguale a una costante. L'ipotesi che sia ad esempio $\varphi_1 = h_0$ (cost.) e φ_2 un polinomio in r (in particolare una funzione lineare in r), porta alla conclusione che la sola possibilità è che sia $\varphi_1 = h_0, \varphi_2 = k_0$; ne segue

$$(3.6) \quad \gamma_1 = h_0 p \quad , \quad \gamma_2 = k_0 q ,$$

con h_0, k_0 costanti da determinare.

In questo caso la (3.5) porge

$$(3.7) \quad \gamma_3 = \alpha r + \gamma_0, \quad \text{con } \alpha = \beta(h_0 - k_0), \quad \beta = 1/c \left(1 - v \frac{Pz_0}{B-C} h_0 k_0 \right) ,$$

e γ_0 costante di integrazione. Inoltre la (3.4) diventa

$$(3.8) \quad pq = \beta \frac{dr}{dt} .$$

Dopo ciò, moltiplicando la prima delle (3.2) per p , la seconda per q , dopo aver sostituito in luogo di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e pq i valori (3.6), (3.7) e (3.8) si ottiene

$$(3.9) \quad \begin{aligned} p \frac{dp}{dt} &= \beta \left\{ \left[a - \frac{Pz_0 v}{A} \alpha k_0 \right] r - \frac{Pz_0}{A} (1 + v\gamma_0) k_0 \right\} \frac{dr}{dt} \\ q \frac{dq}{dt} &= \beta \left\{ b \left(1 - \frac{Pz_0 v}{B-C} \alpha h_0 \right) r + \frac{Pz_0}{B} \left(1 - v \frac{C-A}{B-C} \gamma_0 \right) h_0 \right\} \frac{dr}{dt} . \end{aligned}$$

Analogamente le prime due delle (2.5) porgono

$$(3.10) \quad \begin{aligned} p \frac{dp}{dt} &= \frac{\beta}{h_0} [(k_0 - \alpha) r - \gamma_0] \frac{dr}{dt} \\ q \frac{dq}{dt} &= \frac{\beta}{k_0} [(\alpha - h_0) r + \gamma_0] \frac{dr}{dt}. \end{aligned}$$

Dal confronto delle (3.9) con le (3.10) segue che fra le costanti devono sussistere le relazioni

$$(3.11) \quad \begin{aligned} a - \frac{Pz_0 v}{A} \alpha k_0 &= \frac{k_0 - \alpha}{h_0}, \quad \frac{Pz_0}{A} (1 + v\gamma_0) k_0 = \frac{\gamma_0}{h_0} \\ b \left(1 - \frac{Pz_0 v}{B - C} \alpha h_0 \right) &= \frac{\alpha - h_0}{k_0}, \quad \frac{Pz_0}{B} \left(1 - v \frac{C - A}{B - C} \gamma_0 \right) h_0 = \frac{\gamma_0}{k_0}. \end{aligned}$$

Dalla seconda ed ultima di queste relazioni, per $h_0 \neq 0$, $k_0 \neq 0$, $A \neq B$, si ricava

$$(3.12) \quad \gamma_0 = \frac{C - B}{v(A + B - C)}, \quad (3.12') \quad h_0 k_0 = \frac{C - B}{vPz_0}.$$

Ne segue

$$\beta = 1/(2c) = C/2(A - B), \quad \alpha = (h_0 - k_0)C/2(A - B).$$

Le rimanenti due relazioni (3.11) diventano allora

$$\begin{aligned} ah_0 - k_0 &= \alpha(C - A - B)/A \\ bk_0 + h_0 &= \alpha(A + B - C)/B, \end{aligned}$$

le quali sono entrambe verificate per

$$(3.13) \quad \frac{h_0}{k_0} = \frac{2A - C}{2B - C}.$$

Da questa e dalla (3.12') si ottiene

$$(3.14) \quad h_0^2 = \frac{C - B}{vPz_0} \frac{2A - C}{2B - C}, \quad k_0^2 = \frac{C - B}{vPz_0} \frac{2B - C}{2A - C},$$

che definiscono (a meno del segno) le costanti h_0 , k_0 .

Con i valori trovati delle costanti h_0 , k_0 , γ_0 , le equazioni differenziali (3.9) si identificano colle (3.10), ed esse si riducono alle seguenti

$$\begin{aligned} p dp &= \frac{C}{2(A - B)} \left\{ \frac{2(B - C)}{2A - C} r - \frac{\gamma_0}{h_0} \right\} dr \\ q dq &= \frac{C}{2(A - B)} \left\{ \frac{2(C - A)}{2B - C} + \frac{\gamma_0}{k_0} \right\} dr, \end{aligned}$$

dalle quali si deduce

$$(3.15) \quad \begin{aligned} p^2 &= \frac{C}{A-B} \left\{ \frac{B-C}{2A-C} r^2 - \frac{\gamma_0}{h_0} r \right\} + C_1 \\ q^2 &= \frac{C}{A-B} \left\{ \frac{C-A}{2B-C} r^2 + \frac{\gamma_0}{k_0} r \right\} + C_2, \end{aligned}$$

dove C_1, C_2 sono costanti di integrazione e γ_0, h_0, k_0 sono definiti dalle (3.12) e (3.14).

I coseni direttori $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono ora dati da

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= h_0 p, \quad \gamma_2 = k_0 q, \\ \gamma_3 &= \frac{C}{2(A-B)} (h_0 - k_0) r + \gamma_0 = \frac{Ch_0}{2A-C} r + \gamma_0. \end{aligned}$$

Infine dalla (3.8) si ricava

$$(3.17) \quad t - t_0 = \frac{C}{2(A-B)} \int \frac{dr}{pq},$$

che dà il tempo, con una quadratura ellittica in funzione di r , e dove t_0 è la costante temporale di integrazione.

Poiché i coseni direttori $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ devono verificare la (2.8), fatte le sostituzioni essa si riduce alla

$$h_0^2 C_1 + k_0^2 C_2 + \gamma_0^2 = 1,$$

cioè

$$(3.18) \quad \frac{C-B}{vPz_0} \left\{ \frac{2A-C}{2B-C} C_1 + \frac{2B-C}{2A-C} C_2 \right\} + \frac{(C-B)^2}{v^2(A+B-C)^2} = 1,$$

che costituisce una relazione lineare fra le costanti C_1, C_2 .

È opportuno osservare che sostituendo nell'integrale dell'energia (2.6), (per $x_0 = y_0 = 0$), in luogo di $p^2, q^2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i valori trovati, a semplificazioni effettuate si ha

$$(3.19) \quad \begin{aligned} (B-A) \left\{ \frac{A}{2B-C} C_1 - \frac{B}{2A-C} C_2 \right\} - \\ - \frac{Pz_0(C-B)(2A+2B-C)}{2v(A+B-C)^2} = E. \end{aligned}$$

Questa con la (3.18) costituiscono due equazioni lineari nelle costanti C_1, C_2 , che permettono di determinare queste due costanti in funzione della costante E dell'energia e delle costanti di struttura del solido.

Giova anche calcolare la costante $\mathbf{K}_0$ dal momento delle quantità di moto che si ottiene sostituendo ancora i valori trovati di $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ nella (2.7). Si ha così

$$(3.20) \quad K_0 = Ah_0 C_1 + Bk_0 C_2.$$

Quindi sostanzialmente anche la costante $\mathbf{K}_0$ dipende linearmente dalla costante $\mathbf{E}$ dell'energia.

4. DETERMINAZIONE DEGLI ANGOLI DI EULERO

Una volta determinate le componenti $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ della velocità angolare e i coseni direttori $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, si ottengono immediatamente i tre angoli di Eulero θ, φ, ψ dalle note relazioni

$$(4.1) \quad \gamma_1 = \sin \varphi \cdot \sin \theta, \quad \gamma_2 = \cos \varphi \cdot \sin \theta, \quad \gamma_3 = \cos \theta$$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} p &= \sin \theta \sin \varphi \cdot \dot{\psi} + \dot{\theta} \cos \varphi \\ q &= \sin \theta \cos \varphi \cdot \dot{\psi} - \dot{\theta} \sin \varphi \\ r &= \cos \theta \cdot \dot{\psi} + \dot{\phi}. \end{aligned}$$

La terza delle (4.1) dà senz'altro il coseno dell'angolo di mutazione θ in funzione di $\mathbf{r}$:

$$(4.3) \quad \cos \theta = \gamma_3 = \frac{Ch_0}{2A - C} r + \gamma_0.$$

Dalle prime due delle (4.1) si ricava la tangente dell'angolo di rotazione φ :

$$(4.4) \quad \tan \varphi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{h_0 p}{k_0 q},$$

dove $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ sono espressioni in funzione di $\mathbf{r}$ dalle (3.15).

Infine dalle prime due delle (4.2) si ha

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta} = \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{\sin^2 \theta} = \frac{h_0 p^2 + k_0 q^2}{1 - \gamma_3^2},$$

e tenendo conto della (3.8) si ottiene l'angolo di precessione ψ , in funzione di $\mathbf{r}$, con una quadratura:

$$(4.5) \quad \psi - \psi_0 = \frac{C}{2(A - B)} \int \frac{h_0 p^2 + k_0 q^2}{(1 - \gamma_3^2) pq} dr,$$

che introduce la nuova costante arbitraria ψ_0 .

La soluzione ottenuta dipende dunque da tre costanti arbitrarie: la costante dell'energia $\mathbf{E}$, la costante di precessione ψ_0 e la costante temporale $\mathbf{t}_0$.

Essa definisce quindi per il moto di un corpo rigido asimmetrico intorno a un punto fisso, in un campo di forze newtoniane, un sistema di ∞^3 moti possibili.

Va osservato ancora che per la realtà delle costanti h_0, k_0 i secondi membri delle (3.14) devono essere positivi, e allora, avendo riguardo al valore della costante v , e supposto $A < B$, ciò che è sempre possibile scambiando gli assi solidali x, y segue che deve essere

$$(4.6) \quad 2A < C < 2B.$$

Anche i coseni direttori $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ devono risultare in valore assoluto minori di 1. Considerando allora il valore di γ_3 e supponendo $h_0 > 0$, segue che la componente r della velocità angolare secondo l'asse baricentrale sarà compresa fra i limiti

$$(4.7) \quad \frac{C - 2A}{Ch_0} (\gamma_0 - 1) < r < \frac{C - 2A}{Ch_0} (1 + \gamma_0),$$

dove i limiti si invertono se per h_0 si assume un valore negativo.

Infine, ricordando i valori (3.6) di γ_1, γ_2 , dovrà risultare

$$p^2 < \frac{1}{h_0^2}, \quad q^2 < \frac{1}{k_0^2},$$

e queste, tenendo conto dei valori (3.15) di p^2 e q^2 , impongono delle limitazioni alle costanti C_1, C_2 e quindi alla costante E dell'energia.