Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Osvaldo Ferri

Su di una caratterizzazione grafica della superficie di Veronese di un $S_{5,q}$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.6, p. 603–610.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_6_603_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Geometrie finite. — *Su di una caratterizzazione grafica della superficie di Veronese di un* $S_{5,q}$ (*). Nota di OSVALDO FERRI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We show that a k-set K of $S_{5,q}$ (q odd) of degree $g_4 = 2q + 1$ and of class $[1, q+1, 2q+1]_4$ (cfr. [2], [4]), satisfying the (1.1), is a Veronese surface.

1. Sia K un k–insieme di uno spazio di Galois $S_{r,q}$. Seguendo le notazioni di [2] e [4] chiameremo *carattere* di indice s, rispetto alla dimensione d, di K il numero t_s^d degli spazi subordinati che incontrano K in s punti. Siano $m_0, m_1, \cdots, m_l$ interi tali che $m_0 < m_1 < \cdots < m_l$. Diremo che K è di *classe* $[m_0, m_1, \cdots, m_l]_d$, nella dimensione d, se $t_m^d = 0$ per ogni $m \neq m_0, m_1, \cdots, m_l$ e che è di *tipo* $(m_0, m_1, \cdots, m_l)_d$ se è di classe $[m_0, m_1, \cdots, m_l]_d$ e inoltre è $t_m^d \neq 0$ per ogni $m = m_0, m_1, \cdots, m_l$. Chiameremo *grado* della dimensione d di K il massimo intero g_d tale che $t_{g_d}^d \neq 0$.

Il prof. G. Tallini mi ha posto il problema di caratterizzare la superficie di Veronese di $S_{5,q}$ mediante il comportamento degli spazi subordinati. Precisamente di studiare quei k–insiemi K di $S_{5,q}$ di classe $[1, q+1, 2q+1]_4$ soddisfacenti la proprietà:

$$|S_2 \cap K| \geq 4 \Rightarrow |S_2 \cap K| \geq q + 1 . \tag{1.1}$$

Esporrò ora brevemente i risultati ottenuti nel presente Lavoro. Nel n. 2 vengono studiati in generale gli insiemi di $S_{r,q}$ di grado $g_4 = 2q + 1$ soddisfacenti la (1.1).

Nel n. 3 si dimostra che un k–insieme K di $S_{5,q}$, soddisfacente la (1.1), di grado $g_4 = 2q + 1$ e di classe $[1, q+1, 2q+1]_4$ è una $(q^2 + q + 1)$–calotta congiunta da $S_{5,q}$. Nel n. 4 viene provato che ogni piano avente più di tre punti in comune con K incontra K in un $(q + 1)$–arco piano e che, denotata con $\mathcal{R}$ la famiglia di tali $(q + 1)$–archi piani di K, risulta $(K, \mathcal{R})$ un piano proiettivo. Da ciò e da quanto dimostrato in [3] viene infine provato che, se q è dispari, K risulta una superficie di Veronese.

2. In questo numero ci proponiamo di studiare k–insiemi K di $S_{r,q}$, con $r \geq 5$ e $q > 5$, di grado $g_4 = 2q + 1$ (rispetto agli S_4) e soddisfacenti la (1.1).

Si noti che poiché esistono S_4 aventi con K in comune $2q + 1$ punti (essendo $g_4 = 2q + 1$), si ha che:

$$k \geq 2q + 1. \tag{2.1}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1976.

Ne segue che K *non può essere contenuto in una retta* avendo questa al massimo $q + 1$ punti di K.

Incominciamo a dimostrare le seguenti Proposizioni:

I. *Ogni retta che non appartiene a* K *interseca* K, *al più, in tre punti.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{s}$ una retta di $S_{r,q}$ non appartenente a K e tale che $|\boldsymbol{s} \cap K| = n$. Proviamo che non può essere $4 \leq n \leq q$. Infatti, in tal caso i piani per $\boldsymbol{s}$, avendo in comune con K almeno $n \geq 4$ punti, per la (1.1) ne avrebbero almeno $q + 1$; allora un S_4 per $\boldsymbol{s}$ è tale che ogni suo piano α per $\boldsymbol{s}$ interseca K in almeno un punto fuori di $\boldsymbol{s}$ (essendo $n \leq q$). Poiché i piani di S_4, per $\boldsymbol{s}$, sono $q^2 + q + 1$, si avrebbe dunque: $|S_4 \cap K| \geq q^2 + q + 1 + n \geq \geq q^2 + q + 5$; d'altra parte è $|S_4 \cap K| \leq g_4 = 2q + 1$, onde l'assurdo $2q + 1 \geq q^2 + q + 5$. Quindi è $n \leq 3$ ovvero $n = q + 1$, si ha così l'asserto.

II. *Non esistono due rette sghembe ambedue appartenenti a* K *o ambedue trisecanti* K *o una appartenente e una trisecante* K.

Dimostrazione. Se esistessero due rette sghembe appartenenti a K, ognuna avrebbe con K in comune $q + 1$ punti, dunque ogni S_4 contenente l'S_3 che congiunge tali rette avrebbe con K in comune almeno $2q + 2$ punti ma ciò è assurdo essendo $g_4 = 2q + 1$. Supponiamo ora, sempre per assurdo, che due rette $\boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{s}$, sghembe, siano entrambe trisecanti K oppure che la $\boldsymbol{r}$ appartenga a K e la $\boldsymbol{s}$ sia trisecante. Esistono almeno tre piani, ciascuno passante per la $\boldsymbol{s}$ e per un punto di K su $\boldsymbol{r}$. Ognuno di tali piani interseca K in almeno quattro punti e quindi, per la (1.1), in almeno $q + 1$. L'S_3 che congiunge le due rette, contiene i tre piani e quindi ha in comune con K almeno $3(q + 1 - 3) + 3 = 3q - 3$ punti e ciò è assurdo altrimenti un S_4 per tale S_3 avrebbe con K in comune almeno $3q - 3$ punti e quindi dovrebbe aversi $3q - 3 \leq g_4 = 2q + 1$ ossia $q \leq 4$, mentre si suppone $q > 4$.

III. *Se* K *contiene due rette* $\boldsymbol{r}$ *ed* $\boldsymbol{s}$, *queste sono necessariamente incidenti e* K *è costituito da* $\boldsymbol{r} \cup \boldsymbol{s}$.

Dimostrazione. Le rette $\boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{s}$ non possono essere sghembe per la Proposizione II. Il piano α delle due rette ha con K in comune i $2q + 1$ punti di $\boldsymbol{r} \cup \boldsymbol{s}$ e se esistesse un punto P di K fuori di tali $2q + 1$ punti, un S_3 contenente α e P avrebbe in comune con K almeno $2q + 2$ punti ed altrettanti almeno ne avrebbe in comune con K un S_4 per S_3, contro l'ipotesi $g_4 = 2q + 1$. Ne segue l'asserto.

IV. *Se* K *è congiunto da un piano* α, *allora* K *è un* $(2q + 1)$*–insieme di* α *di grado* $g_1 = 3$ *oppure è costituito da una retta e da un* q*–arco ovvero da due rette di* α.

Dimostrazione. Un S_4 contenente α, contiene K (perché $\alpha \supseteq K$) quindi $k \leq g_4 = 2q + 1$. Per la (2.1) si ha allora $k = 2q + 1$ cioè K è un $(2q + 1)$–insieme di α. Due casi si possono presentare a seconda che K non contenga rette ovvero ne contenga. Nel primo caso K è un $(2q+1)$–insieme di α che, per la Proposizione I, è costituito da punti di cui mai quattro allineati; d'altra parte debbono esistere rette trisecanti, altrimenti K sarebbe un k–arco e quindi $k \leq q+2$ mentre è $k = 2q+1$. Quindi K è un $(2q+1)$–insieme di grado $g_1 = 3$ di α. Nel secondo caso sia $\boldsymbol{r}$ una retta di K, i rimanenti q punti di K o stanno su un'altra retta $\boldsymbol{s}$ ed allora $K = \boldsymbol{r} \cup \boldsymbol{s}$, oppure per la Proposizione I, sono a tre a tre non allineati (se infatti tre fossero su una retta $\boldsymbol{t}$, la $\boldsymbol{t}$ avrebbe in comune con K quattro punti: tali tre punti e il punto $\boldsymbol{t} \cap \boldsymbol{r}$) cioè costituiscono in q–arco. Si ha così l'asserto.

V. *Se è* $q > 5$ *e* K *è congiunto da un* S_3, K *risulta costituito da un q–arco di un piano* α *e da una retta* $\boldsymbol{r}$ *intersecante* α *in un punto* P *fuori del q–arco.*

Dimostrazione. Un S_4 contenente l'S_3 contiene K (perché $S_3 \supseteq K$) quindi $k \leq g_4 = 2q+1$. Per la (2.1) risulta $k = 2q+1$, cioè K è un $(2q+1)$–insieme congiunto dall'S_3. Due casi si possono presentare a seconda che K non contenga rette ovvero ne contenga.

Nel primo caso, per la Proposizione I, K è un $(2q+1)$–insieme costituito da punti a quattro a quattro non allineati. Se K ammette una trisecante $\boldsymbol{t}$, sia $P \in K - \boldsymbol{t}$; il piano α per $\boldsymbol{t}$ e P ha in comune con K almeno quattro punti e quindi, per la (1.1), interseca K in almeno $q+1$ punti. Poiché K è congiunto dall'S_3, esiste un punto Q di K che non appartiene ad α. Il piano β per $\boldsymbol{t}$ e Q, sempre per la (1.1), interseca K in almeno $q+1$ punti. Allora K *non può contenere altri punti fuori dei piani* α e β (se ne esistesse uno, il piano per esso e per $\boldsymbol{t}$ intersecherebbe K in almeno $q+1$ punti, per la (1.1) e i punti di K sarebbero almeno $3(q+1-3)+3 = 3q-3$, mentre è $k = 2q+1 < 3q-3$). Su α o su β *non possono esistere trisecanti diverse da* $\boldsymbol{t}$: perché se, per esempio, $\boldsymbol{r}$ fosse una trisecante di α, il piano γ per $\boldsymbol{r}$ e per un punto Q di β avrebbe, per la (1.1), in comune con K almeno $q+1$ punti di cui al più *sei* (*tre* sulla $\boldsymbol{r}$ e *tre* al più sulla intersezione di γ con β) su $\alpha \cup \beta$ e quindi almeno $q+1-6 \geq 1$ fuori di $\alpha \cup \beta$ e ciò è assurdo perché $K \subseteq \alpha \cup \beta$. Posto allora $\boldsymbol{t} \cap K = \{A, B, C\}$, i punti $K \cap (\alpha - \{C\})$ sono a tre a tre non allineati e cioè costituiscono un k_1–arco. Analogamente formano un k_2–arco i punti di $K \cap (\beta - \{C\})$. Essendo $K \subseteq \alpha \cup \beta$ risulta $k = 2q+1 = (k_1 - 2) + (k_2 - 2) + 3$ cioè $k_1 + k_2 = 2q+2$. Allora degli interi k_1 e k_2 uno almeno deve essere maggiore o uguale a $q+1$. Supponiamo che sia $k_1 \geq q+1$, ne segue che per P_1 passa senz'altro una secante $\boldsymbol{s}$ il k_1–arco diversa da $\boldsymbol{t}$ (cfr. [1], nn. 174, 177, 178). La $\boldsymbol{s}$ è allora una trisecante di K diversa da $\boldsymbol{t}$ il che è escluso per quanto precede. Dunque K *non ammette trisecanti* ed è allora una $(2q+1)$–calotta di S_3. Necessariamente K contiene quattro punti complanari (perché una k–calotta di S_3, costituita da punti a quattro a quattro non complanari è tale che $k \leq q+3$) e quindi per la (1.1) esiste un piano α che interseca K in un $(q+1)$–arco o in un $(q+2)$–arco. Fuori di α esistono allora almeno $q-1$ punti di K. Sia $\boldsymbol{s}$ una retta congiungente due di tali $q-1$ punti. Essa interseca α in un punto A necessariamente fuori di K (altrimenti $\boldsymbol{s}$ sarebbe trisecante) e che possiamo supporre diverso dall'eventuale nucleo N del $(q+1)$-arco $K \cap \alpha$ (se q pari), data l'arbitrarietà della scelta della secante $\boldsymbol{s}$. Per A passano almeno due rette $\boldsymbol{s}_1$ ed $\boldsymbol{s}_2$ secanti l'arco $\alpha \cap K$. I piani β e γ congiungenti rispettivamente $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_1$ ed $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}_2$ hanno ciascuno quattro punti in comune con K e quindi ne hanno almeno $q+1$; ma allora K è costituito da almeno $2(q+1-2)+2+(q+1-4)=3q-3$ punti e ciò è escluso essendo $k=2q+1<3q-3$. L'assurdo prova che il primo caso non può presentarsi.

Esaminiamo il *secondo caso*. Supponiamo cioè che K contenga una retta $\boldsymbol{s}$. Non ne può contenere due per la Proposizione III. I q punti di $K - \boldsymbol{s}$ sono a tre a tre non allineati (se tre fossero allineati su una retta $\boldsymbol{a}$, questa, per la Proposizione II, dovrebbe intersecare $\boldsymbol{s}$ in un punto di K e quindi avrebbe in comune con K almeno quattro punti e ciò è escluso dalla Proposizione I). Esistono certamente tre punti, dei q suddetti, tali che il piano α da essi determinato non contiene la retta $\boldsymbol{s}$. Sia A il punto di intersezione di α con $\boldsymbol{s}$. Poiché $A \in K$, il piano α ha in comune con K almeno quattro punti e quindi interseca K, per la (1.1), in almeno $q+1$ punti. Ne segue che tutti i q punti suddetti devono stare su α, onde K è costituito da $\boldsymbol{s}$ e da un q-arco del piano α. Ne segue l'asserto.

VI. *Se lo spazio congiungente* K *è un* S_s, *con* $s \geq 4$, *ogni retta di* $S_{r,q}$, *che non appartenga a* K, *ha, al più, due punti in comune con* K. *Ne segue (per le Proposizioni II, III) che* K *o è una k-calotta ovvero contiene una sola retta e tutte le altre rette di* $S_{r,q}$ *hanno, al più, due punti in comune con* K.

Dimostrazione. Sia, per assurdo, $\boldsymbol{t}$ una retta tale che $|\boldsymbol{t} \cap K| = 3$. Poiché K è congiunto da un S_s, con $s \geq 4$, esistono certamente tre punti A, B, C di $K - \boldsymbol{t}$ tali che B non appartiene al piano α per A e $\boldsymbol{t}$ e C non appartiene all'S_3 per α e B. Siano β e γ i piani congiungenti rispettivamente $\boldsymbol{t}$ con B e con C. I piani α, β e γ hanno in comune con K ciascuno almeno quattro punti e quindi, per la (1.1), ne hanno almeno $q+1$. L'S_3 congiungente α e β ha in comune con K almeno $2(q+1)-3=2q-1$ punti. Ma allora l'S_4 congiungente S_3 con γ ha in comune con K almeno $(2q-1)+(q+1)-3 = 3q-3$ punti. Deve dunque essere $3q-3<g_4=2q+1$ e ciò è assurdo essendo $q>4$, onde l'asserto.

3. In questo numero ci proponiamo di dimostrare la seguente Proposizione:

VII. *Un k-insieme di* $S_{5,q}$ $(q>5)$ *di grado* $g_4=2q+1$ *soddisfacente la* (1.1) *e di classe* $[1, q+1, 2q+1]_4$ *è necessariamente congiunto dall'*$S_{5,q}$ *e risulta una* (q^2+q+1)*-calotta.*

Dimostrazione. Evidentemente K non può essere congiunto da una retta, cfr. (2.1). Se fosse congiunto da un piano α, per la Proposizione IV esisterebbe una retta $\boldsymbol{t}$ di α bisecante o trisecante K. Allora ogni iperpiano per $\boldsymbol{t}$, non contenente α, intersecherebbe K in due o in tre punti contro l'ipotesi che K è di classe $[1, q+1, 2q+1]_4$ (essendo $q > 5$).

Se K fosse congiunto da un S_3, per la Proposizione V, esso sarebbe costituito da un q–arco piano e da una retta $\boldsymbol{r}$ intersecante α in un punto P fuori del q–arco. Ogni piano β, contenente due punti del q–arco ed un punto di $\boldsymbol{r}$ diverso da P, intersecherebbe K esattamente in tre punti. Allora un iperpiano per β, non contenente l'S_3, intersecherebbe K in soli tre punti e ciò è contro l'ipotesi che K sia di classe $[1, q+1, 2q+1]_4$ (essendo $q > 5$).

Se K fosse congiunto da un S_4, allora sarebbe $k = 2q+1$ (in quanto $g_4 = 2q+1$) ed ogni S_3 contenuto in S_4 intersecherebbe K o in 1 o in $q+1$ punti, cioè K sarebbe un $(2q+1)$–insieme di S_4 di classe $[1, q+1]_3$ e ciò è assurdo in quanto in $S_{r,q}$ $(r \geq 3)$ un k–insieme K di classe $[1, n]_{r-1}$ è necessariamente una retta oppure è $r = 3$ e K è una (q^2+1)–calotta (cfr. [5] e [2], n. 3, Prop. XXI). Si conclude che K è necessariamente congiunto dall'$S_{5,q}$.

Proviamo ora che K *è una calotta*. Per la Proposizione VI basta mostrare che K non contiene rette. Ragionando per assurdo sia $\boldsymbol{t}$ una retta di K. Ogni piano per $\boldsymbol{t}$ interseca K ulteriormente al più in un punto (cfr. Proposizione VI). Possiamo allora proiettare K da $\boldsymbol{t}$ su un $\bar{S}_3$ sghembo con $\boldsymbol{t}$. Il k'–insieme K' proiezione è tale che un qualsiasi piano α' di $\bar{S}_3$ o ha in comune con K' *zero* punti o ne ha esattamente q (infatti l'iperpiano congiungente α' con $\boldsymbol{t}$ ha in comune con K o $q+1$ ovvero $2q+1$ punti, corrispondentemente α' ha in comune con K' *zero* punti oppure q punti). Quindi K' è un k'–insieme di $\bar{S}_3$ di tipo $(0, q)_2$. Ma ciò è assurdo in quanto in forza della Prop. XIV di [2] pag. 13 si ha che un k'–insieme di tipo $(0, n)_2$ di $S_{3,q}$ risulta neccessariamente costituito da un punto, ed allora è $n = 1$, oppure dal complementare di un iperpiano ed allora è $n = q^2$. Dunque K non può contenere rette e cioè è una calotta.

Dimostriamo ora che *deve essere* $k = q^2 + q + 1$. Ricordiamo che, posto $\theta_s = \sum_{i=0}^{s} q^i$, se K è una k–calotta di $S_{r,q}$, denotato con t_s il numero degli iperpiani s–secanti K $(s = 0, 1, 2, \cdots, \theta_{r-1})$ cioè *i caratteri* (cfr. 1) $t_0, t_1, \cdots, t_{\theta_{r-1}}$ di K nella dimensione $r-1$, essi soddisfano il sistema (cfr. [2], n. 1, pag. 7 (17)):

$$\sum_{m=l}^{\theta_{r-1}} \binom{m}{l} t_m = \binom{k}{l} \prod_{i=0}^{r-l-1} \frac{\theta_{r-l-i}}{\theta_{r-l-1-i}} \qquad l = 0, 1, 2, 3. \tag{3.1}$$

Nel nostro caso i caratteri di K sono tutti nulli tranne, al più, t_1, t_{q+1}, t_{2q+1}. Il sistema (3.1) diventa allora:

$$\begin{cases} t_1 + t_{q+1} + t_{2q+1} = \theta_5 \\ t_1 + (q+1)\, t_{q+1} + (2q+1)\, t_{2q+1} = k\theta_4 \\ (q+1)\, q t_{q+1} + 2\,(2q+1)\, q t_{2q+1} = k\,(k-1)\,\theta_3 \\ q\,[(q^2-1)\, t_{q+1} + 2\,(4q^2-1)\, t_{2q+1}] = k\,(k-1)\,(k-2)\,\theta_2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Dalle (3.2) eliminando t_1, t_{q+1}, t_{2q+1} si ha:

$$\theta_2 k^3 - 3(\theta_4 + q^2 + q) k^2 + (2\theta_6 + 3\theta_5 + 4\theta_4 + q^2 + 1) \cdot \\ \cdot k - (2\theta_2 + q - 1)\theta_5 = 0 . \tag{3.3}$$

La (3.3) ammette la soluzione $k = q^2 + q + 1$ e quelle dell'equazione:

$$\theta_2 x^2 - [\theta_2(2q^2 - q + 2) + 3q] x + \\ + \theta_2(2q^3 + q^2 - 2q + 3) + 2(q - 1) = 0 . \tag{3.4}$$

L'asserto seguirà se mostriamo che la (3.4) non ammette radici intere positive. Ragionando per assurdo, supponiamo che la (3.4) abbia almeno una radice intera positiva k. Il primo membro della (3.4) è una funzione $y = f(x)$ tale che: $f(2q^2) = 4q^5 + q^4 - 7q^3 - 2q^2 + 3q + 1 > 0$ (per $q > 1$) e quindi $2q^2$ è esterno all'intervallo delle radici della (3.4). Essendo inoltre la semisomma delle radici della (3.4) data da $\sigma = q^2 + 1 + 3q/2\theta_2 - q/2 < 2q^2$ si ha:

$$k < 2q^2. \tag{3.5}$$

Dalla (3.4), per $x = k$, modulo θ_2, si ha:

$$-3kq + 2(q - 1) \equiv 0 \qquad \text{modulo } \theta_2, \tag{3.6}$$

cioè (essendo $k > 2q + 1$):

$$3kq = 2(q - 1) + a\theta_2 \qquad \textit{con } a \textit{ intero positivo.} \tag{3.7}$$

Dalla (3.7) si ha:

$$3k = 2 + a(q + 1) + (a - 2)/q. \tag{3.8}$$

Essendo k un intero deve essere (poiché è $k > 2q + 1$):

$$(a - 2)/q = c \qquad \textit{con } c \textit{ intero positivo.} \tag{3.9}$$

Dalle (3.8) e (3.9) si ottiene:

$$3k = c\theta_2 + 2q + 4 . \tag{3.10}$$

Per la (3.5) sarà: $c\theta_2 + 2q + 4 < 6q^2$ e quindi:

$$c \leq 5 . \tag{3.11}$$

Sostituendo k ricavato dalla (3.10) nella (3.4) si ha:

$$(q^2 + q + 1)^2 c^2 + (-6q^4 + q^3 + 3q^2 + 2) c - \\ - 6q^3 + 13q^2 + 34q + 31 = 0 . \tag{3.12}$$

Dunque la (3.12), per $c = 1, 2, 3, 4, 5$, deve ammettere soluzioni del tipo $q = p^h$ (p primo): ma ciò è assurdo come si verifica facilmente, onde l'asserto.

4. Sia K un k–insieme di $S_{5,q}$ di grado $g_4 = 2q + 1$, di classe $[1, q+1, 2q+1]_4$ e soddisfacente la (1.1). Per la Proposizione VII è $k = q^2 + q + 1$ e K è una calotta congiunta da $S_{5,q}$. Proviamo che:

VIII. *Ogni* S_3 *di* $S_{5,q}$ *ha in comune con* K *al più* $q + 2$ *punti.*

Dimostrazione. Sia m il numero dei punti che un S_3 ha in comune con K e supponiamo che sia $m \geq q + 2$. Ognuno dei $q + 1$ iperpiani di S_3 incontra K in $2q + 1 - m$ punti fuori dell'S_3. Dunque si ha: $k - m = (q+1)(2q + 1 - m)$ da cui, essendo $k = q^2 + q + 1$, segue $m = q + 2$, onde l'asserto.

IX. *Ogni piano, avente più di tre punti in comune con* K *interseca* K *in un* $(q + 1)$*–arco piano e quindi in una conica se* q *è dispari.*

Dimostrazione. Per la (1.1) un piano α avente in comune con K più di tre punti, interseca K in n punti con $n \geq q + 1$ i quali costituiscono un n–arco essendo K una calotta e quindi o $n = q + 1$ ovvero $n = q + 2$. Non può essere $n = q + 2$ altrimenti l'S_3 congiungente α con un punto P di K fuori di α avrebbe con K in comune almeno $q + 3$ punti e ciò è escluso dalla Proposizione precedente.

X. *Per ogni coppia di punti di* K *passa uno e un solo* $(q + 1)$*–arco piano di* K.

Dimostrazione. Siano A e B due qualsiasi punti di K e supponiamo, per assurdo, che ogni piano per la retta AB non intersechi K secondo un $(q + 1)$–arco e quindi incontri K, fuori di AB, al più in un punto, per la (1.1). Proiettando K dalla retta AB su un S_3 sghembo con tale retta, otteniamo un h–insieme H con $h = q^2 + q - 1$. Un qualsiasi piano S_2 di S_3, congiunto con la retta AB, dà origine ad un S_4 il quale (poiché ha in comune con K almeno due punti A, B) incontra K in $q + 1$ o in $2q + 1$ punti. Quindi l'intersezione di S_2 con H risulta costituita da $q - 1$ punti ovvero $2q - 1$ punti, cioè H risulta un h–insieme di S_3 di tipo $(q - 1, 2q - 1)_2$ rispetto agli S_2. Ne segue allora, cfr. [2], pag. 14, che h deve soddisfare l'equazione:

$$x^2 - [1 + (m + n - 1)\,\theta_{r-1}/\theta_{d-1}]\,x + mn\theta_r\,\theta_{r-1}/\theta_d\,\theta_{d-1} = 0 \tag{4.1}$$

ove è $r = 3$, $d = 2$, $m = q - 1$, $n = 2q - 1$ cioè l'equazione:

$$(q + 1)\,x^2 - (3q^2 + q - 2)\,x + (q^2 - 1)(2q - 1)(q^2 + 1) = 0\,. \tag{4.2}$$

Sostituendo $h = q^2 + q - 1$ nella (4.2), si ha con facili calcoli, $3q - 1 = 0$, il che è assurdo. Ne segue l'*esistenza* di un $(q + 1)$–arco piano di K per A, B.

Proviamo l'*unicità* di tale $(q + 1)$–arco. Se ne esistessero due (necessariamente giacenti su piani distinti per la Proposizione IX) l'S_3 congiungente i loro piani avrebbe in comune con K almeno $2q$ punti e ciò è escluso dalla Proposizione VIII, onde l'asserto.

Osserviamo che se S è un insieme di $q^2 + q + 1$ elementi ed $\mathcal{R}$ una famiglia di parti di S ciascuna costituita da $q + 1$ elementi tali che per due elementi distinti di S passi uno e uno solo elemento $r \in \mathcal{R}$, allora $(S, \mathcal{R})$ è un *piano proiettivo di ordine* q. Da ciò e dalla Proposizione X (osservato che $|K| = k = q^2 + q + 1$) si ha che:

XI. *L'insieme* K, *rispetto alla famiglia* $\mathcal{R}$ *dei* $(q + 1)$-*archi piani di* K, *costituisce un piano proiettivo* $(K, \mathcal{R})$ *d'ordine* q.

I piani di $S_{5,q}$, secanti K in $(q + 1)$-archi sono in numero di $q^2 + q + 1$ (tanti quante le rette del piano proiettivo $(K, \mathcal{R})$). Tali piani sono a due a due incidenti in un punto di K (il punto di intersezione dei due $(q + 1)$-archi sezioni piane con K). D'altra parte mai più di due dei suddetti piani appartengono allo stesso S_4 (in quanto $g_4 = 2q + 1$). Dal duale del Teorema I di [3] segue allora che:

XII. *Un insieme* K *di* $S_{5,q}$, q *dispari, di grado* $g_4 = 2q + 1$ *e di classe* $[1, q + 1, 2q + 1]_4$, *soddisfacente la* (1.1), *risulta una superficie di Veronese.*

Bibliografia

[1] B. Segre (1961) – *Lectures on modern geometry*, Cremonese Ed. Roma.

[2] G. Tallini (1974) – *Problemi e Risultati sulle geometrie di Galois*, Relazione n. 30. Istituto di Matematica, Napoli, 1–30.

[3] G. Tallini (1958) – *Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese*. Nota I e II, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (8), *24*, 19–23, 135–138.

[4] G. Tallini (1973) – *Graphic characterization of algebraic-varietes in a Galois space*. Atti Convegni Lincei, Colloquio Inter. Teorie Combinatorie (settembre).

[5] J. A. Thas (1973) – *A combinatorial problem*, «Geometrie dedicata», *1*, 236–240.