Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Pier Vittorio Cecchherini

Topologie e categorie associabili a spazi grafici o a spazi più generali, I e II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.6, p. 585–591.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_6_585_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Geometria. — *Topologie e categorie associabili a spazi grafici o a spazi più generali, I e II* (*). Nota II di PIER VITTORIO CECCHERINI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — This Note II is the continuation of Note I with the same title (« Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), (1976), 401–410), where the Bibliography is given.

4. CATEGORIE DEGLI SPAZI SOPRAGRAFICI, ecc.

4.1. Siano dati due s.sg. (ovvero due s.qg., ovvero due s.g.) $(S, \bar{S})$ ed $(S', \bar{S}')$, e sia $f: S \rightarrow S'$ un'applicazione. Diremo che:

(1) f è *lineare* o è una *l–applicazione* se

$$x, y, z \in S \quad \text{allineati} \Longrightarrow f(x), f(y), f(z) \text{ allineati};$$

(2) f è un *omomorfismo* o è una *m–applicazione* se

$$X' \in \bar{S}' \Longrightarrow f^{-1}(X') \in \bar{S};$$

(3) f è *continua* o è una *c–applicazione* se

$$C' \text{ chiuso di } \mathscr{A}(S') \Longrightarrow f^{-1}(C') \text{ chiuso di } \mathscr{A}(S);$$

(4) f è continua di tipo c^k o è una c^k–applicazione, ove k è uno dei simboli: $0, 1, \cdots; (f), \infty$, se

$$C' \text{ chiuso di } \mathscr{A}_k(S') \Longrightarrow f^{-1}(C') \text{ chiuso di } \mathscr{A}_k(S)$$

ove si ponga $\mathscr{A}_\infty(\ ) = \mathscr{A}(\ )$. Si noti che una c^∞–applicazione non è altro che una c–applicazione.

Denotiamo con $\mathscr{S}^{(x,y)}$ la categoria per cui

$$\text{Ob } \mathscr{S}^{(x,y)} = \mathscr{S}^{(x)} = \text{classe degli spazi di tipo } x \ (x \in \{\text{s.sg., s.qg., sg.}\}),$$
$$\text{Mor } \mathscr{S}^{(x,y)} = \text{classe delle } y\text{–applicazioni } (y \in \{l, m, c^k\}),$$

composizione di morfismi = composizione di funzioni [1].

(*) Lavoro svolto nell'ambito della Sez. n. 4 del G.N.S.A.G.A del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1976.

(1) Si è indotti naturalmente ad aggiungere alle (1)–(4) la seguente definizione:

(5) f è *continua di tipo* c^{kh} o è una c^{kh}*–applicazione*, ove $k, h \in \{0, 1, \cdots, (f), \infty\}$, se

$$C' \text{ chiuso di } \mathscr{A}_k(S') \Rightarrow f^{-1}(C') \text{ chiuso di } \mathscr{A}_h(S).$$

In tal modo una c^{kk}–applicazione non è altro che una c^k–applicazione. Sorgono però complicazioni per definire le corrispondenti categorie: ad esempio se $k, h \in N$, l'esistenza dell'identità 1_S comporta $k \leq h$, mentre l'esistenza del prodotto operatorio di due c^{kh}–applicazioni comporta $h \leq k$.

4.2. Risulta $\mathcal{S}^{(\text{s.g.})} \subset \mathcal{S}^{(\text{s.qg.})} \subset \mathcal{S}^{(\text{s.sg.})}$, onde si ottiene la catena di sottocategorie piene:

$$\mathcal{S}^{(\text{s.g.},y)} \leq \mathcal{S}^{(\text{s.qg.},y)} \leq \mathcal{S}^{(\text{s.sg.},y)} \qquad (\forall y \in \{l\,,m\,,c^k\})\,.$$

4.3. $\mathcal{S}^{(x,m)}$ è una sottocategoria (non piena) di $\mathcal{S}^{(x,l)}$, per ogni $x \in \{$s.sg., s.qg., s.g.$\}$.

Dimostrazione. Siano $(\mathrm{S}\,,\bar{\mathrm{S}})$ ed $(\mathrm{S}',\bar{\mathrm{S}}')$ due spazi di tipo x, e sia $f:\mathrm{S}\to\mathrm{S}'$ un omomorfismo; dico che f è lineare. Siano $x\,,y\,,z\in\mathrm{S}$ tre punti distinti allineati, e siano $x',y',z'\in\mathrm{S}'$ i punti corrispondenti, che possiamo supporre distinti (altrimenti non ci sarebbe nulla da dimostrare). Allora $f^{-1}(x'\vee y')$ risulta uno s.s. di S contenente z, onde $z'\in x'\vee y'$. La sottocategoria non è piena, come mostrano gli esempi (*a*), (*c*) di 4.5.

4.4. $\mathcal{S}^{(x,m)}$ è una sottocategoria, non piena, di $\mathcal{S}^{(x,c)}$ per ogni $x \in \{$s.sg.: s.qg., s.g.$\}$.

Dimostrazione. Siano $(\mathrm{S}\,,\bar{\mathrm{S}})$ ed $(\mathrm{S}'\,,\bar{\mathrm{S}}')$ due spazi di tipo x. Un omomorfismo $f:\mathrm{S}\to\mathrm{S}'$ è continuo perché f^{-1} trasforma elementi della sottobase $\bar{\mathrm{S}}'$ dei chiusi di $\mathcal{A}(\mathrm{S}')$ in elementi della sottobase $\bar{\mathrm{S}}$ dei chiusi di $\mathcal{A}(\mathrm{S})$. La sottocategoria è non piena, come mostrano gli esempi (*b*), (*c*) di 4.5.

4.5. *Esempi.*

(a) *Applicazioni lineari né omomorfismi né continue.*

(a_1) Siano $(\mathrm{S}\,,\bar{\mathrm{S}})$ ed $(\mathrm{S}',\bar{\mathrm{S}}')$ spazi di tipo x, con $\bar{\mathrm{S}}\neq\mathrm{P}(\mathrm{S})$. Sia $\mathrm{X}\subset\mathrm{S}$, $\mathrm{X}\notin\bar{\mathrm{S}}$, e fissiamo $a',b'\in\mathrm{S}'$ con $a'\neq b'$. La $f:\mathrm{S}\to\mathrm{S}'$ definita da: $(x\in\mathrm{S})$ $f(x)=a'$ se $x\in\mathrm{X}\,,f(x)=b'$ se $x\notin\mathrm{X}$ risulta lineare ma non un omomorfismo perché $f^{-1}(a')=\mathrm{X}\notin\bar{\mathrm{S}}$. Nel caso poi in cui $\{$chiusi di $\mathcal{A}(\mathrm{S})\}\neq\mathrm{P}(\mathrm{S})$, e scelto X in $\mathrm{P}(\mathrm{S})$–$\{$chiusi di $\mathcal{A}(\mathrm{S})\}$, ne viene che f non risulta neppure continua.

(a_2) Sia S_r uno s.g. geometricamente irriducibile di dimensione r, e siano S_k ed S_{r-k-1} due suoi s.s. sghembi. La $f:\mathrm{S}_r\to\mathrm{S}_r$ definita da: $(x\in\mathrm{S}_r)$ $f(x)=x$ se $x\in\mathrm{S}_{r-k-1}\,,f(x)=(x\vee\mathrm{S}_{r-k-1})\cap\mathrm{S}_k$ se $x\notin\mathrm{S}_{r-k-1}$ risulta lineare ma non è un omomorfismo perché se X′ è uno s.s. di $\mathrm{S}_k\,,f^{-1}(\mathrm{X}')=(\mathrm{X}'\vee\mathrm{S}_{r-k-1})-{}$ $-\mathrm{S}_{r-k-1}$. Inoltre, non appena questo insieme non sia unione di un numero finito di s.s. (ad esempio per $\mathrm{S}_r=\mathrm{S}_{r,\mathrm{R}}$), f non risulta neppure continua.

(a_3) Siano $\mathrm{S}_r\,,\mathrm{S}_{r-k-1}\,,\mathrm{S}_k$ come in (a_2). Fissiamo $a'\in\mathrm{S}_k$. La $f:\mathrm{S}_r\to\mathrm{S}_r$ definita da: $(x\in\mathrm{S}_r)f(x)=a'$ se $x\in\mathrm{S}_{r-k-1}\,,f(x)=(x\vee\mathrm{S}_{r-k-1})\cap\mathrm{S}_k$ se $x\notin\mathrm{S}_{r-k-1}$ è lineare, ma non è un omomorfismo perché se X′ è uno s.s. di S_r non contenente a', $f^{-1}(\mathrm{X}')=(\mathrm{X}'\vee\mathrm{S}_{r-k-1})-\mathrm{S}_{r-k-1}$. Inoltre, se questo insieme non è unione finita di s.s. (ad esempio $\mathrm{S}_r=\mathrm{S}_{r,\mathrm{R}}$), f non risulta neppure continua.

(b) *Applicazioni continue né omomorfismi né lineari.*

(b_1) Sia $\mathrm{S}=\mathrm{S}'=\mathrm{S}_{r,q}$ lo spazio di Galois di dimensione r ed ordine q. Una applicazione arbitraria $f:\mathrm{S}\to\mathrm{S}'$ risulta continua. Dunque basta scegliere f non lineare e non omomorfismo (com'è certo possibile), per avere l'esempio voluto.

(b_2) Sia $S = S' = S_{2,R}$. Fissiamo: due rette r, s di S; una conica irriducibile C' di S'; un punto $a' \in S' - C'$; una bijezione $g : S - (r \cup s) \to C'$. La $f : S \to S'$ definita da: $(x \in S)\, f(x) = a'$ se $x \in r \cup s$, $f(x) = g(x)$ se $x \notin r \cup s$ risulta continua, ma non è un omomorfismo perché $f^{-1}(a') = r \cup s \notin \bar{S}$. Inoltre f non è lineare perché tre punti allineati e distinti di $S - (r \cup s)$ vanno in tre punti distinti di C' e quindi non allineati.

(c) *Applicazioni lineari e continue non omomorfismi.*

Assumiamo S, S', r, s come in (b_2). Fissiamo: una retta r' di S', un punto a' di r'; una bijezione $g : S - (r \cup s) \to r'$. La $f : S \to S'$ definita da: $(x \in S)\, f(x) = a'$ se $x \in r \cup s$, $f(x) = g(x)$ se $x \in r \cup s$ risulta lineare e continua ma non è un omomorfismo.

4.6. I monomorfismi (risp. epimorfismi) della categoria $\mathscr{S}^{(x,y)}$ sono i morfismi iniettivi (risp. surgettivi), per ogni $x \in \{$s.sg., s.qg., s.g.$\}$, e per ogni $y \in \{l, m, c\}$. (Dimostrazione standard).

4.7. Designamo con $\mu(\mathscr{C})$ la classe dei monomorfismi di una categoria $\mathscr{C}$. Allora:

(1) $\mu(\mathscr{S}^{(x,m)}) \subseteq \mu(\mathscr{S}^{(x,l)}) \quad (x \in \{\text{s.sg., s.qg., s.g.}\})$;

(2) $\mu(\mathscr{S}^{(\text{s.qg.},m)}) = \mu(\mathscr{S}^{(\text{s.qg.},l)})$;

(3) $\mu(\mathscr{S}^{(x,m)}) \subseteq \mu(\mathscr{S}^{(x,c)}) \quad (x \in \{\text{s.sg., s.qg., s.g.}\})$.

Dimostrazione. (1), (3) subito da 4.3, 4.4, 4.6. (2) Siano $(S, \bar{S})$, $(S', \bar{S}')$ s.qg. e sia $f : S \to S'$ un monomorfismo di $\mathscr{S}^{(\text{s.qg.},l)}$, cioè un'applicazione lineare ed iniettiva (4.6). Per 4.6 basta verificare che f è un omomorfismo, cioè che $X' \in \bar{S}' \Rightarrow X = f^{-1}(X') \in \bar{S}$. Ed invero: $x, y \in X$, $x \neq y$, $z \in x \vee y \Rightarrow x' = f(x) \neq f(y) = y'$, $f(z) = z' \in x' \vee y'$, $x' \vee y' \subseteq X' \Rightarrow z' \in X' \Rightarrow z \in X$. Così $X \in \bar{S}$.

N.B. Dall'esempio (b_1) di 4.5, si trae che nella (3) non vale necessariamente il segno di uguaglianza.

4.8. Il composto $S \oplus S'$ di due spazi di tipo x, S ed S', definito in 2.9 funge da coprodotto in ciascuna delle categorie $\mathscr{S}^{(x,y)}$ $(x \in \{\text{s.sg., s.qg., s.g.}\}$, $y \in \{l, m, c\})$. Inoltre $\mathscr{A}(\ ) : \mathscr{S}^{(x,m)} \to \text{Top}$ è un funtore covariante che conserva i coprodotti.

4.9. Applicazioni lineari iniettive, surgettive e biunivoche fra due s.g. o affini sono state studiate risp. in [4], [3], [2] (2). I risultati ivi stabiliti possono venire opportunamente estesi al caso di s.sg. o di s.qg.

(2) I numeri in [ ] rinviano alla bibliografia alla fine della Nota I.

4.10. *Esistenza del limite diretto in* $\mathscr{S}^{(\text{s.g.},l)}$.

Sia dato nella categoria $\mathscr{S}^{(\text{s.g.},l)}$ un sistema diretto $(S_\alpha, r_{\alpha\beta})$ su un insieme filtrante Λ. Ogni s.g. del sistema venga concepito come una coppia (S_α, L_α), secondo quanto detto in 2.5. Si ha allora:

$$(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \in L_\alpha \Longmapsto (r_{\alpha\beta}(x_\alpha), r_{\alpha\beta}(y_\alpha), r_{\alpha\beta}(z_\alpha)) \in L_\beta \qquad (\forall \alpha, \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha).$$

Sia $(S, t_\alpha) = \varinjlim_{\text{Ens}} S_\alpha$, ove dunque $S = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha / \sim$, con $\sim$ data da:

$$(x, y \in S, x \in S_\alpha, y \in S_\beta) \quad x \sim y \Longleftrightarrow \exists \gamma \in \Lambda, \gamma \geq \alpha, \beta \text{ t.c. } r_{\alpha\gamma}(x) = r_{\beta\gamma}(y),$$

$$t_\alpha = p \circ i_\alpha : S_\alpha \xhookrightarrow{i_\alpha} \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha \xrightarrow{p} \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha / \sim .$$

Definiamo in S una struttura di s.g. secondo 2.5, nel modo seguente:

$$L \subseteq S \times S \times S, \qquad (x, y, z) \in L \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \Lambda, \qquad \exists x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha \in S_\alpha \text{ t.c.}$$
$$t_\alpha(x_\alpha) = x, t_\alpha(y_\alpha) = y, t_\alpha(z_\alpha) = z, \qquad (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \in L_\alpha .$$

La relazione L soddisfa alle proprietà L_1 — L_4 dette in 2.5 [3], talché (S, L) risulta uno s.g. secondo 2.5; inoltre per ogni $\alpha \in \Lambda$, $t_\alpha : S_\alpha \to S$ risulta lineare in base alla definizione di L. In definitiva (S, t_α) è un «bersaglio» in $\mathscr{S}^{(\text{s.g.},l)}$ per il sistema diretto dato. Se poi (S', L') è un altro s.g. e se (S', s_α) è un altro bersaglio in $\mathscr{S}^{(\text{s.g.},l)}$ per il sistema dato, l'applicazione $f: S \to S'$ definita da $f(x) = s_\alpha(x_\alpha)$ allorché $x_\alpha \in S_\alpha$ e $t_\alpha(x_\alpha) = x$ è ben definita ed è l'unica applicazione $S \to S'$ per cui $f \circ t_\alpha = s_\alpha$ per ogni $\alpha \in \Lambda$; infine si verifica che f è lineare [4] e quindi, in conclusione $(S, t_\alpha) = \varinjlim_{\mathscr{S}^{(\text{s.g.},l)}} S_\alpha$.

(3) L_1: $x, y, z \in S$, $|\{x, y, z\}| < 3 \Longmapsto \exists \alpha \in \Lambda$, $\exists x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha \in S_\alpha$ t.c. $t_\alpha(x_\alpha) = x$, $t_\alpha(y_\alpha) = y$, $t_\alpha(z_\alpha) = z$ con $|\{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha\}| < 3 \Longmapsto (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \in L_\alpha \Longmapsto (x, y, z) \in L$.

L_2: $x, y, z \in S$, $(x, y, z) \in L \Longmapsto \exists \alpha \in \Lambda$, $\exists x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha \in S_\alpha$ t.c. $t_\alpha(x_\alpha) = x$, $t_\alpha(y_\alpha) = y$, $t_\alpha(z_\alpha) = z$, $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \in L_\alpha \Longmapsto L_\alpha \ni (y_\alpha, x_\alpha, z_\alpha), (x_\alpha, z_\alpha, y_\alpha), (z_\alpha, y_\alpha, x_\alpha) \Longmapsto L \ni (y, x, z), (x, z, y), (z, y, x)$.

L_3: $x, y, z, z' \in S$, (x, y, z), $(x, y, z') \in L \Longmapsto \exists \alpha, \beta \in \Lambda$, $\exists x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha \in S_\alpha$, $\exists x_\beta, y_\beta, z'_\beta \in S_\beta$ t.c. $t_\alpha(x_\alpha) = x$, $t_\alpha(y_\alpha) = y$, $t_\alpha(z_\alpha) = z$, $t_\beta(x_\beta) = x$, $t_\beta(y_\beta) = y$, $t_\beta(z'_\beta) = z'$, $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \in L_\alpha$, $(x_\beta, y_\beta, z'_\beta) \in L_\beta \Longmapsto \exists \gamma \in \Lambda$, $\gamma \geq \alpha, \beta$ t.c. $x_\gamma = r_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = r_{\beta\gamma}(x_\beta)$, $y_\gamma = r_{\alpha\gamma}(y_\alpha) = r_{\beta\gamma}(y_\beta)$, $z_\gamma = r_{\alpha\gamma}(z_\alpha)$, $z'_\gamma = r_{\beta\gamma}(z'_\beta)$, $t_\gamma(x_\gamma) = x$, $t_\gamma(y_\gamma) = y$, $t_\gamma(z_\gamma) = z$, $t_\gamma(z'_\gamma) = z'$ & $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma) \in L_\gamma$, $(x_\gamma, y_\gamma, z'_\gamma) \in L_\gamma$ (perché le r sono lineari) $\Longmapsto (x_\gamma, z_\gamma, z'_\gamma) \in L_\gamma \Longmapsto (x, z, z') \in L$.

L_4: $x, y, z, y', z' \in S$, $(x, y, z) \notin L$, (x, y, z'), $(x, y', z) \in L \Longmapsto$ (portandosi ad uno stadio $\gamma \in \Lambda$ abbastanza avanzato, come fatto per la verifica di L_3) $\exists \gamma \in \Lambda$, $\exists x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma, y'_\gamma, z'_\gamma \in S_\gamma$ t.c. $t_\gamma(x_\gamma) = x$, $t_\gamma(y_\gamma) = y$, $t_\gamma(z_\gamma) = z$, $t_\gamma(y'_\gamma) = y'$, $t_\gamma(z'_\gamma) = z'$, $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma) \notin L_\gamma$, $(x_\gamma, y_\gamma, z'_\gamma)$, $(x_\gamma, y'_\gamma, z_\gamma) \in L_\gamma \Longmapsto \exists x'_\gamma \in S_\gamma$ t.c. $(x'_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$, $(x'_\gamma, y'_\gamma, z'_\gamma) \in L_\gamma \Longmapsto \exists x' \in S$, $x' = t_\gamma(x'_\gamma)$ t.c. (x', y, z), $(x', y', z') \in L$.

(4) $(x, y, z) \in L \Longmapsto \exists \alpha \in \Lambda$, $\exists x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha \in S_\alpha$ t.c. $t_\alpha(x_\alpha) = x$, $t_\alpha(y_\alpha) = y$, $t_\alpha(z_\alpha) = z$, $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \in L_\alpha \Longmapsto (s_\alpha(x_\alpha), s_\alpha(y_\alpha), s_\alpha(z_\alpha)) \in L'$ (perché le s sono lineari) cioè $(f(x), f(y), f(z)) \in L'$.

N.B. Se ogni t_α è iniettiva (cioè se ogni $r_{\alpha\beta}$ è iniettiva), un s.i. $X \subseteq S$ risulta uno s.s. di $S \Longleftrightarrow p^{-1}(X) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ con X_α s.s. di S_α [5].

4.11. *Esistenza del limite diretto in* $\mathcal{S}^{(s.g.,l)(\mu)} = \mathcal{S}^{(s.g.,m)(\mu)}$.

Se $\mathcal{C}$ è una categoria, denotiamo con $\mathcal{C}^{(\mu)}$ la sottocategoria di $\mathcal{C}$ definita da: $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{(\mu)} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{(\mu)}}(A, B) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \mid f$ mono in $\mathcal{C}\}$. La seconda condizione si esprime, con le notazioni di 4.7, con $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}^{(\mu)} = \mu(\mathcal{C})$. È subito visto che se esistono in $\mathcal{C}$ limiti diretti di sistemi diretti di $\mathcal{C}$, allora esistono in $\mathcal{C}^{(\mu)}$ limiti diretti di sistemi diretti di $\mathcal{C}^{(\mu)}$. In particolare, da 4.10, 4.7 segue che:

Esistono in $\mathcal{S}^{(s.g.,l)(\mu)} = \mathcal{S}^{(s.g.,m)(\mu)}$ limiti diretti di sistemi diretti della categoria.

Inoltre, prendendo le inclusioni come morfismi della categoria suddetta, si ha che:

Uno s.g. $(S, \bar{S})$ è il limite diretto dei suoi s.s. di dimensione finita: $S = \varinjlim_{S_\alpha \in \bar{S}_f} S_\alpha$ ($\bar{S}_f$ come in 3.1).

4.12. *Limiti diretti di spazi vettoriali e di spazi proiettivi.*

Siano dati, su un medesimo insieme filtrante Λ, un sistema diretto di campi:

$$(1) \qquad (K_\alpha, k_{\alpha\beta} : K_\alpha \to K_\beta)$$

ed un sistema diretto di spazi vettoriali definito su (1):

$$(2) \qquad (V_\alpha, \bar{r}_{\alpha\beta} : V_\alpha \to V_\beta) \qquad (\text{ogni } \bar{r}_{\alpha\beta} \text{ semilineare iniettiva})$$

ove dunque V_α è un K_α–spazio vettoriale ed inoltre $v_\alpha \in V_\alpha$, $c_\alpha \in K_\alpha \Longmapsto \bar{r}_{\alpha\beta}(c_\alpha v_\alpha) = k_{\alpha\beta}(c_\alpha)\, \bar{r}_{\alpha\beta}(v_\alpha)$. Posto

$$\varinjlim K_\alpha = (K, s_\alpha : K_\alpha \to K) \quad , \quad \varinjlim V_\alpha = (V, \bar{t}_\alpha : V_\alpha \to V),$$

V risulta uno spazio vettoriale su K, avendosi inoltre: $v_\alpha \in V_\alpha$, $c_\alpha \in K_\alpha \Longmapsto \bar{t}_\alpha(c_\alpha v_\alpha) = s_\alpha(c_\alpha)\, \bar{t}_\alpha(v_\alpha)$. Inoltre ogni $\bar{t}_\alpha$ risulta iniettiva (come le $\bar{r}_{\alpha\beta}$).

Siano poi $(S(V), L)$ e $(S(V_\alpha), L_\alpha)$ gli spazi proiettivi associati risp. a V ed a V_α $\forall \alpha \in \Lambda$; denotiamo con $[v] \in S(V)$ e con $[v_\alpha] \in S(V_\alpha)$ i punti individuati da vettori non nulli $v \in V$, $v_\alpha \in V_\alpha$. Per ogni $\alpha, \beta \in \Lambda$ con $\alpha \leq \beta$, definiamo l'applicazione lineare $r_{\alpha\beta} : S(V_\alpha) \to S(V_\beta)$ data da $r_{\alpha\beta}([v_\alpha]) = [\bar{r}_{\alpha\beta}(v_\alpha)]$. Si ottiene così in $\mathcal{S}^{(s.g.,l)}$ un sistema diretto:

$$(3) \qquad (S(V_\alpha), r_{\alpha\beta}).$$

(5) Infatti, se X è uno s.s. di S, $X_\alpha = t_\alpha^{-1}(X)$ è uno s.s. di S perché t_α è un omomorfismo (4.7, (2)); se ogni X_α è uno s.s. di S_α, presi $x, y \in S$ con $x \neq y$ e preso $z \in x \vee y$, esiste $\alpha \in \Lambda$ ed esistono $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha \in S_\alpha$ t.c. $t_\alpha(x_\alpha) = x$, $t_\alpha(y_\alpha) = y$, $t_\alpha(z_\alpha) = z$ & $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \in L_\alpha$; pertanto $z_\alpha \in X_\alpha$ e quindi $z \in X$.

Ebbene, con le notazioni precedenti, risulta [6]:

$$\mathrm{S}(\mathrm{V}) = \mathrm{S}(\varinjlim \mathrm{V}_\alpha) = \varinjlim \mathrm{S}(\mathrm{V}_\alpha) .$$

Più precisamente, posto per ogni $[v_\alpha] \in \mathrm{S}(\mathrm{V}_\alpha)$, $t_\alpha([v_\alpha]) = [\bar{t}_\alpha(v_\alpha)]$, si ha che

$$(4) \qquad (\mathrm{S}(\mathrm{V}), t_\alpha : \mathrm{S}(\mathrm{V}_\alpha) \to \mathrm{S}(\mathrm{V}))$$

è il limite diretto di (3). In altri termini: il funtore $\mathrm{S}(\ ) : \mathrm{Vett} \to \mathscr{S}^{(\mathrm{s.g.},l)}$ conserva i limiti diretti (Vett = categoria degli spazi vettoriali con morfismi dati dalle applicazioni semilineari iniettive).

4.13. *Il funtore $\mathscr{A}(\ )$ non conserva i limiti diretti.*

Sappiamo (4.8) che il funtore $\mathscr{A}(\ ) : \mathscr{S}^{(x,m)} \to \mathrm{Top}$ conserva i coprodotti. Esso non conserva però i limiti diretti, come verrà ora stabilito.

Consideriamo dunque in $\mathscr{S}^{(\mathrm{s.g.},m)}$ un sistema diretto

$$(1) \qquad (\mathrm{S}_\alpha, r_{\alpha\beta}) \quad \text{sistema diretto in } \mathscr{S}^{(\mathrm{s.g.}m)}.$$

Se (1) ammette limite diretto in $\mathscr{S}^{(\mathrm{s.g.},m)}$, questo non può essere che il limite diretto di (1) in $\mathscr{S}^{(\mathrm{s.g.},l)}$, di cui la prima è una sottocategoria. In ogni caso (1) ammette nella seconda il

$$(2) \qquad \varinjlim \mathrm{S}_\alpha = (\mathrm{S}, t_\alpha : \mathrm{S}_\alpha \to \mathrm{S}) \quad \text{in } \mathscr{S}^{(\mathrm{s.g.},l)}.$$

Poiché ogni $r_{\alpha\beta} : \mathrm{S}_\alpha \to \mathrm{S}_\beta$ è un omomorfismo, ogni $r_{\alpha\beta}$ è una funzione continua $(\mathrm{S}_\alpha, \mathscr{A}(\mathrm{S}_\alpha)) \to (\mathrm{S}_\beta, \mathscr{A}(\mathrm{S}_\beta))$. Si ha così un

$$(3) \qquad ((\mathrm{S}_\alpha, \mathscr{A}(\mathrm{S}_\alpha)), r_{\alpha\beta}) \quad \text{sistema diretto di Top}$$

che ammette ivi il

$$(4) \qquad \varinjlim (\mathrm{S}_\alpha, \mathscr{A}(\mathrm{S}_\alpha)) = (\mathrm{S}, t_\alpha : \mathrm{S}_\alpha \to \mathrm{S}) \quad \text{in Top}.$$

(6) Invero: ogni t_α è manifestamente lineare; inoltre per ogni $\alpha, \beta \in \Lambda$ con $\alpha \leq \beta$ risulta $t_\beta r_{\alpha\beta} = t_\alpha$ perché $\forall [v_\alpha] \in \mathrm{S}(\mathrm{V}_\alpha)$ risulta $t_\beta r_{\alpha\beta}([v_\alpha]) = t_\beta [\bar{r}_{\alpha\beta}(v_\alpha)] = [\bar{t}_\beta(\bar{r}_{\alpha\beta}(v_\alpha))] = [\bar{t}_\alpha(v_\alpha)] = t_\alpha([v_\alpha])$. Così (4) è un bersaglio per (3) in $\mathscr{S}^{(\mathrm{s.g.},l)}$. Sia $(\mathrm{S}', t'_\alpha : \mathrm{S}(\mathrm{V}_\alpha) \to \mathrm{S}')$ un altro bersaglio per (3). Definiamo $f : \mathrm{S}(\mathrm{V}) \to \mathrm{S}'$ nel modo seguente: se $[v] \in \mathrm{S}(\mathrm{V})$ con $v = \bar{t}_\alpha(v_\alpha)$ assumiamo $f([v]) = t'_\alpha[v]$; la definizione è ben posta ed f è l'unica funzione $\mathrm{S}(\mathrm{V}) \to \mathrm{S}'$ t.c. $\forall \alpha \in \Lambda$, $f t_\alpha = t'_\alpha$; inoltre f è lineare perché se $[u], [v], [w] \in \mathrm{S}(\mathrm{V})$ risultano allineati in $\mathrm{S}(\mathrm{V})$, $\exists a, b \in \mathrm{K}$ t.c. $w = au + bv$; allora $\exists a_\alpha, b_\alpha \in \mathrm{K}_\alpha$, $\exists u_\alpha, v_\alpha \in \mathrm{V}_\alpha$ t.c. $s_\alpha(a_\alpha) = a$, $s_\alpha(b_\alpha) = b$, $\bar{t}_\alpha(u_\alpha) = u$, $\bar{t}_\alpha(v_\alpha) = v$, onde $w = a\bar{t}_\alpha(u_\alpha) + b\bar{t}_\alpha(v_\alpha) = \bar{t}_\alpha(a_\alpha u_\alpha + b_\alpha v_\alpha)$, e quindi $\exists u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha = a_\alpha u_\alpha + b_\alpha v_\alpha \in \mathrm{V}_\alpha$ t.c. $\bar{t}_\alpha(u_\alpha) = u$, $\bar{t}_\alpha(v_\alpha) = v$, $\bar{t}_\alpha(w_\alpha) = w$. Così $[u_\alpha], [v_\alpha], [w_\alpha] \in \mathrm{S}(\mathrm{V}_\alpha)$ risultano allineati in $\mathrm{S}(\mathrm{V}_\alpha)$ onde $t'_\alpha([u_\alpha]) = f([u])$, $t'_\alpha([v_\alpha]) = f([v])$, $t'_\alpha([w_\alpha]) = f([w])$ risultano allineati in S'.

Si ottiene (4) ponendo in $S = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha / \sim$ la topologia quoziente della topologia di $\bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} S$ somma delle topologie $\mathscr{A}(S_\alpha)$

$$S_\alpha \xhookrightarrow{i_\alpha} \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} S \xrightarrow{p} \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} S / \sim \qquad (p i_\alpha = t_\alpha) .$$

Ebbene:

Se i morfismi $r_{\alpha\beta}$ in (1) sono iniettivi, risulta

$$\mathscr{A}\,(\varinjlim_{\mathscr{S}(\text{s.g.},l)} S_\alpha) \leq \varinjlim_{\text{Top}} \mathscr{A}\,(S_\alpha)$$

senza che necessariamente valga il segno di uguaglianza.

Invero X s.s. di $\varinjlim_{\mathscr{S}(\text{s.g.},l)} S_\alpha \mapsto p^{-1}(X)$ s.s. di $\bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha$ per il *N.B.* di 4.10 e per 2.9 $\mapsto p^{-1}(X)$ chiuso di $\mathscr{A}\,(\bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathscr{A}\,(S_\alpha) \mapsto X$ chiuso di $\varinjlim_{\text{Top}} \mathscr{A}\,(S_\alpha)$, per definizione di topologia quoziente. Così ogni chiuso di una sottobase di chiusi di $\mathscr{A}\,(\varinjlim S_\alpha)$ è un chiuso $\varinjlim \mathscr{A}\,(S_\alpha)$, e ciò prova la prima parte dell'asserto.

Per la seconda parte, si consideri lo s.g. $(S, \bar{S})$ associato allo spazio vettoriale $V = \prod_{i \in N} K_i$ con $K_i = GF(q)\ \forall i \in N$. Tale s.g. S è limite diretto dei suoi s.s. $S_\alpha \in \bar{S}_{(f)}$, cioè di dimensione finita, per 4.11. Attualmente ogni $S_\alpha \in \bar{S}_{(f)}$ ha un numero finito di punti, onde $\mathscr{A}\,(S_\alpha)$ risulta discreta per 3.5 *c*), e quindi risulta discreta anche la topologia $\varinjlim \mathscr{A}\,(S_\alpha)$; mentre ovviamente $\mathscr{A}\,(\varinjlim S_\alpha) = \mathscr{A}\,(S)$ non è discreta.