Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ottavio Caligaris, Pietro Oliva

Un teorema di esistenza per problemi di Lagrange in spazi di Banach

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.6, p. 571–579.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_6_571_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Calcolo delle variazioni. — *Un teorema di esistenza per problemi di Lagrange in spazi di Banach* (*). Nota di OTTAVIO CALIGARIS e PIETRO OLIVA, presentata (**) dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — Following the techniques used by Rockafellar in [6] we prove an existence theorem for problems of Lagrange in reflexive separable Banach spaces.

INTRODUZIONE

Sia V uno spazio di Banach riflessivo e separabile e sia $L : [0, 1] \times V \times \times V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\} = \tilde{\mathbf{R}}$ una integranda normale propria convessa nell'ultima variabile.

Per ogni funzione $x : [0, 1] \to V$ che sia assolutamente continua definiamo

$$I(x) = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \tag{0.1}$$

e consideriamo il problema di:

$$\text{Minimizzare } I(x) \text{ sullo spazio } \mathcal{A}_V \tag{0.2}$$

delle funzioni che prendono valori in V e sono assolutamente continue su $[0, 1]$.

Se la funzione integranda soddisfa una opportuna condizione di crescita, I risulta debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $\mathcal{A}_V$ ed inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{R}_+$

$$\{x \in \mathcal{A}_V : I(x) \le \alpha\} \cap \{x \in \mathcal{A}_V : \|x\|_{\mathcal{C}_V} \le r\} \tag{0.3}$$

è debolmente compatto, essendo $\mathcal{C}_V$ lo spazio delle funzioni da $[0, 1]$ in V, continue. Se inoltre valgono alcune ipotesi che sono precisate nel Paragrafo 2, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\{x \in \mathcal{A}_V : I(x) \le \alpha\} \tag{0.4}$$

è debolmente compatto, I è debolmente semicontinuo inferiormente ed il minimo del problema (0.2) è assunto.

Cogliamo l'occasione per ringraziare il prof. J. P. Cecconi con il quale abbiamo discusso i risultati di questo lavoro.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Laboratorio di Matematica Applicata del C.N.R. presso l'Università di Genova.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1976.

§ 1.

Sia V uno spazio di Banach riflessivo e separabile, V′ il suo duale, che risulterà parimenti separabile. Con $\|\cdot\|_V$ e $\|\cdot\|_{V'}$ indichiamo rispettivamente le norme in V e V′, mentre $(\cdot\,,\cdot)$ è la dualità tra V e V′, la prima variabile essendo intesa in V e la seconda in V′.

$\mathscr{C}_V$ è lo spazio delle funzioni $x : [0\,,1] \to V$ continue, normato da

$$\|x\|_{\mathscr{C}_V} = \max \{\|x(t)\|_V : t \in [0\,,1]\}. \tag{1.1}$$

Definiamo L_V^q, $1 \leq q \leq +\infty$, lo spazio delle funzioni $x : [0\,,1] \to V$ misurabili rispetto alla misura di Lebesgue su $[0\,,1]$ per le quali risulta:

$$\|x\|_{L_V^q} = \left(\int_0^1 \|x(t)\|_V^q \,dt\right)^{1/q} < +\infty\,, \qquad 1 \leq q < +\infty \tag{1.2}$$

$$\|x\|_{L_V^\infty} = \sup \text{ess} \{\|x(t)\|_V : t \in [0\,,1]\} < +\infty \quad [1]. \tag{1.3}$$

L_V^q è spazio di Banach e, detto $q' = q/(q-1)$, $q' = +\infty$ se $q = 1$, l'esponente coniugato di q, è noto che, [3],

$$(L_V^q)' = L_{V'}^{q'}, \qquad 1 \leq q < +\infty. \tag{1.4}$$

Con $\mathscr{A}_V$ indichiamo lo spazio delle funzioni assolutamente continue da $[0\,,1]$ in V: se $x \in \mathscr{A}_V$ per quasi ogni $t \in [0\,,1]$ esiste $\dot{x}(t)$, $\dot{x} \in L_V^1$ e si ha per ogni $t \in [0\,,1]$ (si veda ad esempio [1])

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\,ds\,; \tag{1.5}$$

pertanto, [1] Cor. A. 2, è lecito identificare $\mathscr{A}_V$ con $V \oplus L_V^1$ e se definiamo

$$\|x\|_{\mathscr{A}_V} = \|x(0)\|_V + \|\dot{x}\|_{L_V^1} \tag{1.6}$$

$\mathscr{A}_V$ è spazio di Banach separabile.

Inoltre si può identificare il duale di $\mathscr{A}_V$ con $V' \oplus L_{V'}^\infty$ ed esprimere la dualità tra $\mathscr{A}_V$ e $V' \oplus L_{V'}^\infty$ mediante la

$$(x(0)\,,w) + \int_0^1 (\dot{x}(t)\,,f(t))\,dt\,, \qquad x \in \mathscr{A}_V \;,\quad w \in V' \;,\quad f \in L_{V'}^\infty. \tag{1.7}$$

Riserviamo il simbolo $\rightharpoonup$ per indicare le convergenze nella topologia debole. Ogni volta sarà precisato con un indice lo spazio al quale la convergenza va riferita.

Osserviamo per chiarezza che se $\{x_n\} \subset \mathscr{A}_V$

$$(1.8) \qquad x_n \underset{\mathscr{A}_V}{\rightharpoonup} x \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} x_n(0) \underset{V}{\rightharpoonup} x(0) \\ \dot{x}_n \underset{L^1_V}{\rightharpoonup} \dot{x}. \end{cases}$$

Diciamo che $F : [0, 1] \times V \to \tilde{\mathbf{R}} \cup \{-\infty\}$ è una integranda normale se F è misurabile su $[0, 1] \times V$ rispetto alla σ–algebra generata su $[0, 1] \times V$ dal prodotto della σ–algebra di Lebesgue su $[0, 1]$ e di Borel su V e se $F(t, \cdot)$ è debolmente semicontinua inferiormente; diciamo inoltre che F è propria se $F(t, \cdot)$ non è identicamente $+\infty$ e non è mai $-\infty$. Come in [5] si può vedere che:

PROPOSIZIONE 1.1. *Sia* $F : [0, 1] \times V \to \tilde{\mathbf{R}} \cup \{-\infty\}$ *una integranda normale* $F(t, \cdot)$ *convessa; allora*

$$G(t, w) = \sup \{(v, w) - F(t, v) : v \in V\}$$

è una integranda normale e $G(t, \cdot)$ *è convessa. Se* F *è propria, allora è la coniugata di* G *che risulta a sua volta propria.*

Tutte le integrande che consideriamo nel seguito sono della forma $L : [0, 1] \times V \times V \to \tilde{\mathbf{R}}$, sono supposte normali e proprie; inoltre supponiamo sempre che $L(t, x, \cdot)$ sia convessa.

La normalità di L assicura che se $x \in \mathscr{A}_V$

$$(1.9) \qquad I(x) = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt$$

è ben definito, essendo possibili i valori $+\infty$ e $-\infty$ se $L(t, x(t), \dot{x}(t))$ è minorato o, rispettivamente maggiorato, da una funzione sommabile. Nel caso in cui $L(t, x(t), \dot{x}(t))$ non sia né maggiorato né minorato da funzioni sommabili, è conveniente definire $I(x) = +\infty$ ([5]).

Nel seguito supporremo anche che esista $x \in \mathscr{A}_V$ tale che $I(x) \in \mathbf{R}$.

Concludiamo questo paragrafo con un Lemma.

LEMMA 1.2. *Sia* $\{x_n\} \subset \mathscr{A}_V$ *allora, se* $x_n \underset{\mathscr{A}_V}{\rightharpoonup} x$, *per ogni* $t \in [0, 1]$ *si ha* $x_n(t) \underset{V}{\rightharpoonup} x(t)$.

Dimostrazione. Sia $t \in [0, 1]$, per la (1.5)

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t \dot{x}_n(s)\, ds$$

e per la (1.8) si ha $x_n(0) \underset{V}{\rightharpoonup} x(0)$ e $\dot{x}_n \underset{L^1_V}{\rightharpoonup} \dot{x}$.

Ma allora, per ogni $f \in L^{\infty}_{V'}$

$$\int_0^1 (\dot{x}_n(s) - \dot{x}(s), f(s))\, ds \to 0 \tag{1.10}$$

e posto

$$f(s) = \begin{cases} w, & 0 \leq s \leq t \\ 0, & t < s \leq 1 \end{cases}, \qquad w \in V' \quad \text{si ha} \quad f \in L^{\infty}_{V'}$$

e dalla (1.10)

$$\Big(\int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}(s))\, ds, w\Big) = \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}(s), w)\, ds \to 0 .$$

Pertanto

$$\int_0^t \dot{x}_n(s)\, ds \underset{V}{\rightharpoonup} \int_0^t \dot{x}(s)\, ds$$

e la tesi. *Q.E.D.*

Per ulteriori risultati rimandiamo a [1], [3], [5].

§ 2.

Su L consideriamo inoltre le seguenti condizioni:

(2.1) esiste $\Phi : [0, 1] \times \overline{\mathbf{R}}_+ \times \overline{\mathbf{R}}_+ \to \mathbf{R}$, con $\Phi(\cdot, r, s)$ sommabile per ogni $r, s \in \overline{\mathbf{R}}_+$, tale che, per ogni $t \in [0, 1]$, $\sup \{H(t, x, p) : \|x\|_V \leq r, \|p\|_{V'} \leq s\} \leq \Phi(t, r, s)$

essendo $H(t, x, p) = \sup \{(v, p) - L(t, x, v) : v \in V\}$.

(2.2) i) esiste $s \in \mathbf{R}_+$, esistono $\sigma, \theta : [0, 1] \to \mathbf{R}$ sommabili tali che, per ogni $(x, v) \in V \times V$ e $t \in [0, 1]$

$$L(t, x, v) \geq s \|v\|_V + \sigma(t) \|x\|_V + \theta(t) ;$$

ii) esistono $\sigma_0, \theta_0 : [0, 1] \to \mathbf{R}$ sommabili tali che, per ogni $(x, v) \in V \times V$ e $t \in [0, 1]$

$$L(t, x, v) \geq \sigma_0(t) \|x\|_V + \theta_0(t) ;$$

iii) $s \exp\left(-\left(\int_0^1 |\sigma(t)|\, dt\right)/s\right) > \int_0^1 |\sigma_0(t)|\, dt ;$

iv) esiste $E \subset [0, 1]$ ed esistono tre funzioni $\rho, \delta : [0, 1] \to \mathbf{R}$ $\gamma : \overline{\mathbf{R}}_+ \to \mathbf{R}$ in modo che, $\text{mis}\, E \neq 0$, ρ e δ sommabili, δ non negativa, $\int_E \delta(t)\, dt \neq 0$, γ non decrescente e $\lim_{s \to +\infty} \gamma(s)/s = +\infty$ ($\lim_{s \to +\infty} \gamma(s) = +\infty$ se $\sigma_0 \equiv 0$) e si abbia, per ogni $(x, v) \in V \times V$ e $t \in E$

$$L(t, x, v) \geq \delta(t)\, \gamma(\|x\|_V) + \rho(t).$$

OSSERVAZIONE 2.1. Se $V = \mathbf{R}^n$ la condizione (2.1) è equivalente alla « basic growth condition » introdotta da Rockafellar in [6].

LEMMA 2.2. *Se vale la condizione* (2.1), $H(t, \cdot, p)$ *è debolmente semicontinua superiormente sequenzialmente.*

Dimostrazione. Osserviamo che, per ogni $(t, r, \alpha) \in [0, 1] \times \overline{\mathbf{R}}_+ \times \mathbf{R}$ l'insieme

$$A(t, r, \alpha) = \{v \in V : \exists (x, p) \in V \times V', \|x\|_V \leq r, \|p\|_{V'} \leq r,$$
$$L(t, x, v) - (v, p) \leq \alpha\}$$

è limitato nella norma di V.

Sia infatti $\|x\|_V \leq r$ e $\|p\|_{V'} \leq s$, $s > r$, per la (2.1)

$$(v, p) - L(t, x, v) \leq H(t, x, p) \leq \Phi(t, r, s)$$

e quindi

$$L(t, x, v) \geq \sup\{(v, p) - \Phi(t, r, s) : \|p\|_{V'} \leq s\} = s\|v\|_V - \Phi(t, r, s).$$

Ora, se $v \in A(t, r, \alpha)$ si ha che esistono x e p, $\|x\|_V \leq r$, $\|p\|_{V'} \leq r < s$ tali che

$$\alpha \geq L(t, x, v) - (v, p) \geq s\|v\|_V - \Phi(t, r, s) - r\|v\|_V =$$
$$= (s - r)\|v\|_V - \Phi(t, r, s)$$

da cui

$$\|v\|_V \leq \frac{\alpha + \Phi(t, r, s)}{s - r} \in \mathbf{R}.$$

Fissati ora $t \in [0, 1]$, $x \in V$, $p \in V'$ si ha che l'insieme

$$\{v \in V : L(t, x, v) - (v, p) \leq \alpha\} \qquad \alpha \in \mathbf{R}$$

è debolmente chiuso, per la debole inferiore semicontinuità di $L(t, x, \cdot) - (\cdot, p)$ ed è limitato in quanto contenuto in $A(t, r, \alpha)$, ove $r = \max\{\|x\|_V, \|p\|_{V'}\}$.

Allora è debolmente compatto, e poiché

$$-H(t, x, p) = \inf\{L(t, x, v) - (v, p) : v \in V\}$$

tale estremo inferiore è in realtà un minimo.

Mostriamo ora che, per ogni $t \in [0, 1]$, $\alpha \in \mathbf{R}$, e $p \in V'$, l'insieme

$$B(t, p, \alpha) = \{x \in V : -H(t, x, p) \leq \alpha\}$$

è debolmente sequenzialmente chiuso, per cui $-H(t, \cdot, p)$ risulterà debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente. Sia allora $\{x_n\} \subset B(t, p, \alpha)$, $x_n \underset{V}{\rightharpoonup} x_0$; si ha $-H(t, x_n, p) \leq \alpha$ ed esiste $v_n \in V$ tale che, per ogni $n \in \mathbf{N}$ $L(t, x_n, v_n) - (v_n, p) \leq \alpha$. D'altra parte è possibile trovare $r \in \mathbf{R}_+$ tale che, per ogni n, $\|x_n\|_V \leq r$ e $\|p\|_{V'} \leq r$ in modo che $v_n \in A(t, r, \alpha)$. Esiste allora k tale che $\|v_n\|_V \leq k$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, ed esiste $\{v_{n'}\} \subset \{v_n\}$ tale che $v_{n'} \underset{V}{\rightharpoonup} v_0 \in V$; ma per la debole semicontinuità inferiore di $L(t, \cdot, \cdot) - (\cdot, p)$ e poiché $L(t, x_{n'}, v_{n'}) - (v_{n'}, p) \leq \alpha$ si avrà $L(t, x_0, v_0) - (v_0, p) \leq \alpha$ cioè $-H(t, x_0, p) = \min\{L(t, x_0, v) - (v, p) : v \in V\} \leq \alpha$ ed infine $x_0 \in B(t, p, \alpha)$. *Q. E. D.*

TEOREMA 2.3. *Se vale la condizione* (2.1) I *è sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente su* $\mathcal{A}_V$.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathcal{A}_V$; poniamo $L(t, x(t), v) = F(t, v)$; F è una integranda normale convessa e la sua coniugata è $F^*(t, p) = H(t, x(t), p)$; poiché $L^\infty_{V'}$ è decomponibile e per ogni $p \in L^\infty_{V'}$ si ha

$$\int_0^1 F^*(t, p(t))\, dt = \int_0^1 H(t, x(t), p(t))\, dt \leq \int_0^1 \Phi(t, \|x\|_{\mathscr{C}_V}, \|p\|_{L^\infty_{V'}})\, dt \in \mathbf{R}$$

allora, come nel Teorema 2 di [5], si ha che

$$\int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = \sup\left\{\int_0^1 (\dot{x}(t), p(t))\, dt - \right.$$
$$\left. - \int_0^1 H(t, x(t), p(t))\, dt : p \in L^\infty_{V'}\right\}.$$

Sarà pertanto sufficiente dimostrare che, per ogni fissato $p \in L^\infty_{V'}$, il funzionale

$$x \in \mathcal{A}_V \mapsto \int_0^1 (\dot{x}(t), p(t))\, dt - \int_0^1 H(t, x(t), p(t))\, dt$$

è debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $\mathcal{A}_V$. Osserviamo innanzi tutto che la funzione $x \in \mathcal{A}_V \mapsto \int_0^1 (\dot{x}(t), p(t))\, dt$ è debolmente continua, e sia $\{x_n\} \subset \mathcal{A}_V$, $x_n \underset{\mathcal{A}_V}{\rightharpoonup} x$; per il Lemma 1.2 $x_n(t) \underset{V}{\rightharpoonup} x(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$ ed inoltre esiste $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$ tale che $\|x_n\|_{\mathcal{A}_V} \leq r$ per ogni n.

Allora, per ogni $t \in [0, 1]$ ed ogni n

$$\|x_n(t)\|_V = \left\| x_n(0) + \int_0^t \dot{x}_n(s)\, ds \right\|_V \leq \|x_n(0)\|_V +$$

$$+ \int_0^1 \|\dot{x}_n(s)\|_V\, ds = \|x_n\|_{\mathscr{A}_V} \leq r.$$

Perciò per il Lemma 2.2

$$\limsup_n H(t, x_n(t), p(t)) \leq H(t, x(t), p(t)) \qquad \text{per quasi ogni} \quad t \in [0, 1].$$

Poiché per la (2.1) $H(t, x_n(t), p(t)) \leq \Phi(t, r, \|p\|_{L^\infty_{V'}})$, applicando il Lemma di Fatou, si ottiene

$$\limsup_n \int_0^1 H(t, x_n(t), p(t))\, dt \leq \int_0^1 \limsup_n H(t, x_n(t), p(t))\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 H(t, x(t), p(t))\, dt. \qquad \qquad Q.E.D.$$

TEOREMA 2.4. *Se vale la condizione* (2.1), *gli insiemi*

$$\{x \in \mathscr{A}_V : I(x) \leq \alpha\} \cap \{x \in \mathscr{A}_V : \|x\|_{\mathscr{C}_V} \leq r\}$$

sono debolmente compatti per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ *ed ogni* $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Dimostrazione. Sia $\sup\{H(t, x, p) : \|x\|_V \leq r\} = h(t, r, p)$, posto $g(t, r, p) = \max\{0, h(t, r, p)\}$, se $\|x\|_V \leq r$ si ha

$$L(t, x, v) = \sup\{(v, p) - H(t, x, p) : p \in V'\} \geq$$

$$\geq \sup\{(v, p) - g(t, r, p) : p \in V'\} = g^*(t, r, v).$$

Ma se $\|x\|_{\mathscr{C}_V} \leq r$ si ha $\|x(t)\|_V \leq r$ per ogni $t \in [0, 1]$ e

$$I(x) = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \geq \int_0^1 g^*(t, r, \dot{x}(t))\, dt.$$

Allora

$$\{x \in \mathscr{A}_V : I(x) \leq \alpha\} \cap \{x \in \mathscr{A}_V : \|x\|_{\mathscr{C}_V} \leq r\} \subset \tag{2.3}$$

$$\subset \left\{x \in \mathscr{A}_V : \int_0^1 g^*(t, r, \dot{x}(t))\, dt \leq \alpha\right\} \cap \{x \in \mathscr{A}_V : \|x\|_{\mathscr{C}_V} \leq r\}.$$

Poiché per ogni $p \in L^{\infty}_{V'}$ la (2.1) assicura che

$$\int_0^1 g^{**}(t, r, p(t))\, dt = \int_0^1 g(t, r, p(t))\, dt \leq \int_0^1 \max\{0, \Phi(t, r, \|p\|_{L^{\infty}_{V'}})\}\, dt \in \mathbf{R},$$

si ha che, si veda [5],

$$\left\{\dot{x} \in L^1_V : \int_0^1 g^*(t, r, \dot{x}(t))\, dt \leq \alpha\right\}$$

è debolmente compatto, e poiché si può identificare $\mathscr{A}_V$ con $V \oplus L^1_V$ l'insieme che figura nel secondo membro della (2.3) è debolmente compatto.

Infine, dal momento che, per il Teorema 2.3, I è debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente, l'insieme a primo membro della (2.3) è debolmente sequenzialmente chiuso e contenuto in un insieme debolmente compatto. Ma allora, per il Teorema 10.3.2. di [4] tale insieme è debolmente compatto. *Q.E.D.*

La dimostrazione del Lemma 2.6 di [2] può essere riscritta con ovvie modifiche dei simboli e prova il seguente Lemma

LEMMA 2.5. *Se valgono le condizioni* (2.2) *allora per ogni* $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\{x \in \mathscr{A}_V : I(x) \leq \alpha\}$$

è limitato nella norma di $\mathscr{A}_V$ *e quindi anche nella norma di* $\mathscr{C}_V$. *Inoltre per ogni* $x \in \mathscr{A}_V$ *si ha* $I(x) > -\infty$.

Si può ora ottenere un teorema di esistenza del minimo.

TEOREMA 2.6. *Se valgono le condizioni* (2.1) *e* (2.2), *allora esiste* $x_0 \in \mathscr{A}_V$ *tale che*

$$I(x_0) = \min\{I(x) : x \in \mathscr{A}_V\} > -\infty .$$

Dimostrazione. Per il Lemma 2.5 si ha, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e per r opportuno

$$\{x \in \mathscr{A}_V : I(x) \leq \alpha\} \cap \{x \in \mathscr{A}_V : \|x\|_{\mathscr{C}_V} \leq r\} = \{x \in \mathscr{A}_V : I(x) \leq \alpha\}$$

e perciò gli insiemi di livello di I sono debolmente compatti per il Teorema 2.4. Ma allora sono anche debolmente chiusi ed I è debolmente semicontinuo inferiormente. *Q.E.D.*

In maniera del tutto analoga al Lemma 2.5 si può provare anche il seguente risultato

LEMMA 2.7. *Se valgono le condizioni* (2.2), (i), (ii), (iii), *allora per ogni* $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\{x \in \mathscr{A}_V : I(x) \leq \alpha, x(0) \in K\}$$

è limitato nella norma di $\mathscr{A}_V$ *e quindi anche nella norma di* $\mathscr{C}_V$, *essendo* K *un sottoinsieme debolmente compatto di* V. *Inoltre per ogni* $x \in \mathscr{A}_V$ *si ha* $I(x) > -\infty$.

TEOREMA 2.8. *Se valgono le condizioni* (2.1) *e* (2.2) (i), (ii), (iii) *allora esiste* $x_0 \in \mathscr{A}_V$ *tale che*:

$$I(x) = \inf \{I(x) : x \in \mathscr{A}_V , x(0) \in K\} > -\infty ,$$

essendo K *un sottoinsieme debolmente compatto di* V.

Dimostrazione. Per il Lemma 2.7 per ogni α esiste $r \in \mathbf{R}_+$ tale che

$$\{x \in \mathscr{A}_V : I(x) \leq \alpha , x(0) \in K\} \subset \{x \in \mathscr{A}_V : I(x) \leq \alpha\} \cap \{x \in \mathscr{A}_V : \|x\|_{\mathscr{C}_V} \leq r\} .$$

Ma per il Teorema 2.4, l'insieme di destra è debolmente compatto in $\mathscr{A}_V$ e quindi essendo I debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $\mathscr{A}_V$, Teorema 2.3, l'insieme di sinistra è sequenzialmente chiuso e perciò sequenzialmente compatto, [4] Teorema 10.3.2. *Q.E.D.*

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BREZIS (1973) – *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Publishing Company. Amsterdam.

[2] O. CALIGARIS, F. FERRO e P. OLIVA – *Sull'esistenza del minimo per problemi di calcolo delle variazioni relativi ad archi di variazione limitata*. Di prossima pubblicazione.

[3] N. DINCULEANU (1967) – *Integral representation of linear functionals*. Proceedings of the Symposium in Analysis. Queen's University, June. 1–41.

[4] R. LARSEN (1973) – *Functional Analysis*. M. Dekker, New York.

[5] R. T. ROCKAFELLAR (1971) – *Convex integral functionals and duality. Contributions to nonlinear functional analysis*. E. Zarantonello editor, Academic Press, New York. 215–236.

[6] R. T. ROCKAFELLAR (1975) – *Existence theorems for general control problems of Bolza and Lagrange*, « Advances in Mathematics », *15*, 312–333.