Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, Mehmet Namik Oguztöreli

Problema di Goursat per le equazioni polivibranti. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.6, p. 553–559.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_6_553_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Analisi matematica. — *Problema di Goursat per le equazioni polivibranti.* Nota I [1] di DEMETRIO MANGERON [2],[3] e MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI [4], presentata [*] dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — In this paper a Goursat problem for a polyvibrating equation of higher order with analytic data is considered.

1. INTRODUZIONE

In seguito all'elaborazione dei lavori [1], [2] dovuti al primo degli Autori ed alla pubblicazione di un'elegantissima formula dovuta all'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone [3] un cospicuo numero di Note e Memorie dedicate allo studio delle equazioni polivibranti è stato inserito in diversi periodici di Matematica pura ed applicata. Recentemente, le equazioni polivibranti hanno trovato applicazioni negli studi concernenti le funzioni «spline» [4], [5] ed il disegno automatico delle superficie di forma qualunque [6], [7]. Indicazioni bibliografiche riguardanti la tematica collegata con le equazioni polivibranti trovansi alla fine della presente Nota [8]–[15].

Si consideri un'equazione lineare polivibrante con coefficienti costanti d'ordine k, cioè un'equazione provvista di derivata k–ma totale di Picone [16], [17] di forma seguente:

$$\frac{\partial^{2k} u(x,y)}{\partial x^k \partial y^k} + a_{k-1} \frac{\partial^{2k-2} u(x,y)}{\partial x^{k-1} \partial y^{k-1}} + \cdots + a_1 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + + a_0 u(x,y) = f(x,y), \tag{1.1}$$

ove x e y sono variabili reali, $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ sono costanti note e $f(x,y)$ è una funzione pur essa nota. Si cerchi la soluzione dell'equazione (1.1) sod-

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1976.

(1) This work was partly supported by the National Research Council of Canada by Grant NRC–A 4345 through the University of Alberta.

(2) Istituto Politecnico di Iași, Repubblica Socialista di Romania. Attualmente Dept. of Math., The University of Alberta, Edmonton Alberta, Canada.

(3) This Author wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics.

(4) Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton 7, Alberta, Canada.

disfacente le condizioni

$$(1.2)\qquad \begin{cases} u(x, y_0) = p_0(x) \quad , \quad u(x_0, y) = q_0(y) \,, \\ \left.\dfrac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x\, \partial y}\right|_{y=y_0} = p_1(x) \quad , \quad \left.\dfrac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x\, \partial y}\right|_{x=x_0} = q_1(y) \,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left.\dfrac{\partial^{2k-2} u(x, y)}{\partial x^{k-1}\, \partial y^{k-1}}\right|_{y=y_0} = p_{k-1}(x) \quad , \quad \left.\dfrac{\partial^{2k-2} u(x, y)}{\partial x^{k-1}\, \partial y^{k-1}}\right|_{x=x_0} = q_{k-1}(y) \,, \end{cases}$$

ove $p_\nu(x)$ e $q_\nu(y)$ sono funzioni note e tali che $p_\nu(x_0) = q_\nu(y_0)$, $\nu = 0, 1, \cdots, k-1$. Assumiamo che si abbia

$$(1.3)\qquad \begin{cases} f(x, y) = \displaystyle\sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn} \frac{(x-x_0)^m}{m!} \frac{(y-y_0)^n}{n!} \,, \\ p_\nu(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} p_{\nu,m} \frac{(x-x_0)^m}{m!} \,, \\ q_\nu(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q_{\nu,n} \frac{(y-y_0)^n}{n!} \,, \qquad \nu = 0, 1, \cdots, k-1 \,, \end{cases}$$

con

$$(1.4)\qquad |f_{mn}| \leq \mathrm{M} \,, \; |p_{\nu,m}| \leq \mathrm{M} \,, \; |q_{\nu,n}| \leq \mathrm{M}$$
$$(\nu = 0, 1, \cdots, k-1 \,; m, n = 0, 1, 2, \cdots) \,,$$

ove M è una costante positiva. Per risolvere il problema (1.1)–(1.2), facciamo uso del *metodo della funzione* F, da noi già applicato in un problema alquanto particolare [18]. Diciamo, seguendo [18], che $\mathrm{F}(x, y; \alpha, \beta)$ è una « F–funzione » se essa soddisfa le equazioni funzionali

$$(1.5)\qquad \frac{\partial \mathrm{F}(x, y; \alpha, \beta)}{\partial x} = \mathrm{F}(x, y; \alpha+1, \beta) \,,$$
$$\frac{\partial \mathrm{F}(x, y; \alpha, \beta)}{\partial y} = \mathrm{F}(x, y; \alpha, \beta+1) \,,$$

essendovi α e β parametri reali. Le funzioni $\mathrm{F}(x, y, \alpha, \beta)$ da noi introdotte sono « F–funzioni » rispetto ad ognuna delle variabili nel senso di C. Truesdell [19]–[20].

Sia $\varphi(\alpha, \beta)$ una funzione definita per $\alpha = \alpha_0 + m$, $\beta = \beta_0 + n$, $m, n = 0, 1, 2, \cdots$, ove α_0 e β_0 sono costanti, tale che si abbia

$$(1.6)\qquad |\varphi(\alpha_0 + m, \beta_0 + n)| \leq \mathrm{M} \qquad m, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Ha luogo il seguente teorema: L'unica soluzione delle equazioni funzionali (1.5) soddisfacente la condizione

$$F(x_0, y_0; \alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta) \tag{1.7}$$

è data dalla formola

$$F(x, y; \alpha, \beta) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varphi(\alpha + m, \beta + n) \frac{(x - x_0)^m}{m!} \frac{(y - y_0)^n}{n!}. \tag{1.8}$$

2. SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI GOURSAT (1.1)–(1.2)

Cerchiamo adesso una soluzione del problema di Goursat (1.1)–(1.2) sotto la forma di una F–funzione nel senso di qui sopra. Per far ciò, assumiamo che questa F–funzione, denotiamola $F(x, y; \alpha, \beta)$, si riduca ad una funzione $\varphi(\alpha, \beta)$ per $(x, y) = (x_0, y_0)$. E pertanto, si tratta di determinare la funzione $\varphi(\alpha, \beta)$ $(\alpha = \alpha_0 + m, \beta = \beta_0 + n; m, n = 0, 1, 2, \cdots)$ in tal modo che la funzione $F(x, y; \alpha, \beta)$, definita tramite la formula (1.8), soddisfi (1.1)–(1.2).

Poichè $F(x, y; \alpha, \beta)$ è supposta essere una F–funzione, si ha in virtù delle equazioni (1.5)

$$\frac{\partial^{2\nu}}{\partial x^\nu \partial y^\nu} F(x, y; \alpha, \beta) = F(x, y; \alpha + \nu, \beta + \nu) \qquad \nu = 1, 2, \cdots, k, \tag{2.1}$$

e dunque, dalle (1.1), (1.2), (1.8) e (2.1) si ottengono le seguenti equazioni a differenze parziali:

$$\begin{cases} F(x, y; \alpha + k, \beta + k) - \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu F(x, y; \alpha + \nu, \beta + \nu) = f(x, y), \\ F(x, y_0; \alpha + \nu, \beta + \nu) = p_\nu(x), \\ F(x_0, y; \alpha + \nu, \beta + \nu) = q_\nu(y), \qquad \nu = 0, 1, \cdots, k - 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Si ponga adesso

$$\varphi_{m,n} = \varphi(x + m, \beta + n), \qquad m, n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.3}$$

Sostituendo conseguentemente le serie di potenze di cui sopra in ambo i membri di ognuna delle equazioni (2.2) e facendo il confronto tra i coefficienti dei termini simili si ottengono le seguenti relazioni di ricorrenza per le $\varphi_{m,n}$:

$$\begin{cases} \varphi_{m+k,n+k} - \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu \varphi_{m+\nu,n+\nu} = f_{mn}, \\ \varphi_{m,0} = p_{0,m}, \varphi_{m+1,1} = p_{1,m}, \cdots, \varphi_{m+k-1,k-1} = p_{k-1,m}, \\ \varphi_{0,n} = q_{0,n}, \varphi_{1,n+1} = q_{1,n}, \cdots, \varphi_{k-1,n+k-1} = q_{k-1,n}, \\ \qquad (m, n = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases} \tag{2.4}$$

Siccome $p_\nu(x_0) = q_\nu(y_0)$, $\nu = 0, 1, \cdots, k-1$, si ha pure $p_{0,0} = q_{0,0}$, $p_{1,0} = q_{1,0}, \cdots, p_{k-1,0} = q_{k-1,0}$. Si può facilmente verificare che ogni $\varphi_{m,n} = \varphi(\alpha + m, \beta + n)$ è unicamente determinata tramite il sistema ricorrente (2.4) per qualsiasi valore di α e β.

Sia ora

$$\alpha = \sum_{\nu=0}^{k-1} |\alpha_\nu| . \tag{2.5}$$

Tenendo conto delle disuguaglianze (1.4) si può dimostrare senza difficoltà, facendo uso del metodo d'induzione completa, che ha luogo la diseguaglianza

$$|\phi_{m,n}| \leq M \sum_{i=0}^{r(m,n)} \alpha^i, \tag{2.6}$$

ove si è posto

$$r(m, n) = \left\{\left[\frac{m}{k}\right], \left[\frac{n}{k}\right]\right\}, \tag{2.7}$$

ed il simbolo $[s]$ denota come al solito la parte intera del numero s. E pertanto per $\alpha < 1$ si ha

$$|\varphi_{m,n}| \leq \frac{M}{1-\alpha} = M_1 \qquad (m, n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.8}$$

donde il Teorema: Per ogni fissata coppia di numeri $(\alpha_0, \beta_0)'$ la funzione $\varphi(\alpha, \beta)$, definita per $\alpha = \alpha_0 + m$, $\beta = \beta_0 + n$; $m, n = 0, 1, 2, \cdots$, (2.3), (2.4), soddisfa la condizione (1.6) e la funzione $F(x, y; \alpha, \beta)$ data mediante l'equazione (1.8) rappresenta l'unica soluzione analitica del problema di Goursat (1.1)–(1.2) non appena si abbia $\alpha < 1$.

3. Osservazioni

1. Il metodo esposto qui sopra può essere applicato nella ricerca delle soluzioni dei problemi di Goursat relativi alle equazioni polivibranti ancora più generali. La novità che abbiamo conseguito consiste nella determinazione della funzione $\varphi(\alpha, \beta)$ che genera la F–funzione tramite la formula (1.8) in modo che F soddisfi tanto l'equazione differenziale quanto le condizioni prescritte sulle caratteristiche.

2. Nello studio del nostro problema si può fare uso delle variabili complesse invece di quelle reali. Siano, ad esempio, z e ζ le variabili complesse ($z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$) e si consideri l'equazione polivibrante

$$\frac{\partial^{2k} u(z, \zeta)}{\partial z^k \partial \zeta^k} + a_{k-1} \frac{\partial^{2k-2} v(z, \zeta)}{\partial z^{k-1} \partial \zeta^{k-1}} + \cdots + a_1 \frac{\partial^2 v(z, \zeta)}{\partial z \partial \zeta} + a_0 v(z, \zeta) = f(z, \zeta), \tag{3.1}$$

sottoposta alle condizioni

$$
(3.2)\qquad \begin{cases}
v(z,\zeta_0) = p_0(z) \quad , \quad v(z_0,\zeta) = q_0(\zeta)\,, \\[4pt]
\left.\dfrac{\partial^2 v(z,\zeta)}{\partial z\,\partial\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0} = p_1(z) \quad , \quad \left.\dfrac{\partial^2 v(z,\zeta)}{\partial z\,\partial\zeta}\right|_{z=z_0} = q_1(\zeta) \\[4pt]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[4pt]
\left.\dfrac{\partial^{2k-2} v(z,\zeta)}{\partial z^{k-1}\,\partial\zeta^{k-1}}\right|_{\zeta=\zeta_0} = p_{k-1}(z) \quad , \quad \left.\dfrac{\partial^{2k-2} v(z,\zeta)}{\partial z^{k-1}\,\partial\zeta^{k-1}}\right|_{z=z_0} = q_{k-1}(\zeta)\,,
\end{cases}
$$

essendovi $p_\nu(z)\,,\,q_\nu(\zeta)\,,\,\nu = 0\,,\,1\,,\cdots,\,k-1$ funzioni analitiche note, determinate dalle loro serie di potenze analoghe a quelle considerate in (1.3). L'applicazione del metodo di cui sopra conduce alla determinazione di un'unica soluzione analitica del problema di Goursat (3.1)–(3.2). Sia $v = v(z\,,\,\zeta)$ la soluzione ricercata. Se si ha $\zeta = \bar{z} = x - iy$, l'equazione polivibrante (3.1) si riduce ad una delle equazioni iper– o poliarmoniche, felicemente introdotte dal Nostro Accademico Linceo [21], [22] e studiate in seguito con notevole successo dagli Accademici M. Nicolescu [23] e I. N. Vekua [24], [25].

3) Siccome i dati e la soluzione del problema studiato sono del tipo esponenziale, il metodo di Laplace e quello della trasformata di Laplace–Picone ad intervallo d'integrazione finito [26]–[29] possono essere applicati nella ricerca della soluzione del problema (1.1)–(1.2) ossia (3.1)–(3.2).

4) Di fondamentale importanza nei nostri studi ulteriori concernenti la capacità di determinazione delle soluzioni dei problemi di Goursat o al contorno per le equazioni polivibranti relativi alle frontiere non caratteristiche sono i lavori dell'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo iperbolico in due variabili indipendenti [30].

5) Ricordiamo, infine, in tutt'altro ordine di idee, l'interesse che presentano oggidì le equazioni polivibranti e le equazioni polivibranti generalizzate, di cui il prototipo è dato dal sistema

$$
(3.3)\qquad [\mathrm{A}(x)\,u' + \lambda \mathrm{B}(x)\,u]' + \lambda\,[\mathrm{B}(x)\,u' + \mathrm{C}(x)\,u] = 0\,,
$$

$$
x = (x_1\,,\,x_2\,,\cdots,\,x_m) \quad , \quad u' = \frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots+n_m}\,u(x)}{\partial x_1^{n_1}\,\partial x_2^{n_2}\cdots\partial x_m^{n_m}}\,,
$$

$$
(3.4)\qquad \left(u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \cdots = \frac{\partial^{n_j-1}\,u(x)}{\partial x_j^{n_j-1}}\right)_{x_j=a_j,b_j} = 0\,,
$$

$$
\mathrm{R} = \{a_j \le x_j \le b_j\,;\,j = 1\,,\,2\,,\cdots,\,m\}
$$

nello studio dei problemi concernenti la geometria delle equazioni alle derivate parziali d'ordine superiore [31]–[32].

BIBLIOGRAFIA

[1] D. MANGERON (1932) – *Problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. », ser. VI, *16*, 305–310 e « Rend. Accad. Sci. fis., mat., Napoli », ser. 4, *2*, 29–40.

[2] D. MANGERON (1937) – *Problèmes à la frontière non caractéristiques pour une classe d'équations aux dérivees partielles d'ordre supérieur*, « Comptes rendus Acad. Sci., Paris », *204*, 94–96; 544–546; 1022–1024.

[3] M. PICONE (1940) – *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della Fisica Matematica*, « Ann. Sci. Univ. de Jassy », Sez. I, *26*, 183–232.

[4] G. BIRKHOFF (1969) – *Piecewise and Bicubic Interpolation and Approximation in Polygons*. Nel Vol. « Approximations with special emphasis on Spline Functions », p. 209. Academic Press, New York and London.

[5] W. J. GORDON (1969) – *Distributive Lattices and the Approximation of Multivariate Functions*. Nel Vol. « Approximations with special emphasis on Spline Fucntions », p. 236. Academic Press, New York and London.

[6] G. BIRKHOFF e W. J. GORDON (1968) – *The Draftsman's and related Equations*, « J. of Approx. Theory », *1*, 199–208.

[7] W. J. GORDON – *Blending-function method of bivariate and multivariate approximation and interpolation*, « SIAM J. on Number. Anal. » (in stampa).

[8] D. MANGERON (1968) – *Équations fonctionnelles. Quelques problèmes concernant les équations polyvibrantes*, « Comptes rendus Acad. Sci., Paris », *266*, 1050–1053 e 1121–1124.

[9] M. N. OĞUZTÖRELI – *A boundary value problem for a polyvibrating equation*, « Rend. Accad. Sci. Torino » (in stampa).

[10] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI (1966–1967) – *Sur quelques problèmes de calcul des variations concernant les équations polyvibrantes*, « Math. Notae », *21* (7), 1–2, 9–16.

[11] M. N. OĞUZTÖRELI e D. MANGERON (1968) – *Problemi ottimali spettanti ai sistemi di controllo con parametri distribuiti*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. », ser. VIII, *44*, 1–6 e *45*, 74–78.

[12] F. S. ROSSI (1963) – *Problemi di Mangeron spettanti ai certi sistemi non lineari*, « Bull. Inst. Polytechn. Jassy », n.s. *9* (13), 3–4, 39–43.

[13] JU. M. BEREZANSKI (1968) – *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators*, « Amer. Math. Society Trans. Monographs », Vol. 17, Providence, Vedasi p. 754 ed il Cap. IV (1968).

[14] D. MANGERON e L. E. KRIVOSHEINE (1964) – *New methods of numerical computation for the solutions of various integro-differential equations*, « Romanian Journ. of Appl. Mech. », *9* (6), 1195–1221 e *10*, (1), 3–34.

[15] D. MANGERON e L. E. KRIVOSHEINE (1964) – *Vari problemi concernenti le equazioni alle derivate parziali ed operatori di rimanenza*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », *34*, 344–368.

[16] M. PICONE (1937) – *Problemi spettanti alle derivate totali*. Conferenza tenuta all'Università di Jassy (Iași, Romania), Maggio 1937.

[17] D. MANGERON (1939) – *L'applicazione del metodo di Picone alle teoria delle equazioni alle derivate parziali*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », ser. VII, *1*, 1–9.

[18] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI – *Solution of the Darboux problem for a polyvibrating equation in the form of an* F*-function* (in corso di stampa).

[19] C. TRUESDELL (1948) – *An assay toward a unified theory of special functions*, « Ann. of Math. Studies », *18*, 182 p.

[20] C. TRUESDELL (1950) – *On the addition and muliplication theorems for special functions*, « Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. », *35*, 752–755.

[21] M. PICONE (1927) – *Sulle funzioni metaarmoniche*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. Sci. fis., mat. e nat. », ser. VI, *6*.

[22] M. PICONE (1936) – *Sulla convergenza delle successioni di funzioni iperarmoniche*, « Bull. math. Soc. Roumaine des Sci. », *38*.

[23] M. NICOLESCU (1936) – *Fonctions polyarmoniques*. Hermann, Paris.

[24] I. N. VEKUA (1967) – *New methods for solving elliptic equations*. North-Holland, Pub. Co.

[25] I. N. VEKUA (1956) – *The IVth Romanian Congress of Mathematicians*, « Izv. Akad. Nauk SSSR Math. », ser., *86–87*.

[26] D. MANGERON (1946) – *New methods concerning the determination of solutions of partial differential equations*, « Rev. Stiin. », *32* (1), 38–40.

[27] M. PICONE (1968) – *Mauro Picone*, « Annuario dell'Accad. dei XL », 1–29.

[28] L. POLI e P. DELERUE (1954) – *Le calcul sumbolique à deux variables indépendentes*. Gauthier–Villars, Paris, pp. 49–50.

[29] D. MANGERON e M. N. OĞUZTÖRELI (1968) – *Application of the Laplace–Picone transforms with finite integration interval to the study of mathematical physics differential systems*, « Romanian J. Appl. Mech. », *13* (5), 841–852.

[30] M. PICONE (1969) – *Sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine del tipo iperbolico in due variabili indipendenti*. Fotocopie delle Memorie pubblicate nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » negli anni 1910 e 1911, Roma.

[31] V. BLIZNIKAS (1969) – *Über die Geometrie des Normalsystems partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung*, « Lietuvos Matematikos Rinkinys » *9* (2), 211–232.

[32] O. BORŮVKA (1969) – *Mathematical Papers offered to O. Borůvka for his jubilee year*, Brno.