
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PIER VITTORIO CECCHERINI

**Topologie e categorie associabili a spazi grafici o a
spazi più generali, I e II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 61 (1976), n.5, p. 401–410.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_5_401_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Topologie e categorie associabili a spazi grafici o a spazi più generali*, I e II (*). Nota I di PIER VITTORIO CECCHERINI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Starting from graphic spaces (or from more general structures) several topologies and categories are defined and studied. Limits of direct systems of graphic spaces are proved to exist, and certain functors arising from the above material are studied in connection with the possibility of being direct limits preserving.

I. INTRODUZIONE

In [8] G. Tallini ha associato, ad uno spazio grafico S di dimensione *finita* r , una topologia $\mathcal{A}(S)$, assumendone come sottobase per i chiusi la totalità dei sottospazi delle varie dimensioni $h = -1, 0, \dots, r$. In [8] viene stabilito che le unioni finite di sottospazi esauriscono di già la totalità dei chiusi di $\mathcal{A}(S)$, e vengono messe in evidenza fra l'altro le seguenti proprietà della topologia:

- (a) $\mathcal{A}(S)$ è T_1 ;
- (b) $\mathcal{A}(S)$ è quasicompatta;
- (c) $\mathcal{A}(S)$ è di Hausdorff $\iff S$ è finito $\iff \mathcal{A}(S)$ è discreta;
- (d) $\mathcal{A}(S)$ è connessa $\iff S$ è infinito e irriducibile;
- (e) se S è lineare su un campo e se $Z(S)$ denota la topologia di Zariski di S : $\mathcal{A}(S) \leq Z(S)$; $\mathcal{A}(S) = Z(S) \iff \dim S \leq 1$ vel S è finito.

In tal modo $\mathcal{A}(\)$ risulta un funtore dalla categoria degli spazi grafici (rispetto alle collineazioni) alla categoria degli spazi topologici (rispetto agli omoemorfismi).

Nel presente lavoro vengono anzitutto estese le considerazioni di [8] al caso di strutture più generali degli spazi grafici: gli spazi sopragrafici e gli spazi quasigrafici. Queste strutture, introdotte e studiate in [1], presentano il vantaggio ad esempio di trattare simultaneamente il caso grafico, proiettivo ed affine.

Nel n. 2, dopo averne richiamate le definizioni, ne vengono stabilite alcune proprietà complementari, utilizzate successivamente; viene fra l'altro dato un esempio (n. 2.6) di spazio sopragrafico di dimensione infinita, il cui reticolo degli spazi subordinati non è complementato, risolvendo così una questione posta in [1]. Inoltre viene presentata una definizione di spazio grafico, come insieme munito di un'opportuna relazione ternaria (allineamento), che consente di semplificare poi la trattazione dei limiti induttivi di sistemi induttivi di spazi grafici.

Nel n. 3, estendendo lo studio compiuto da G. Tallini [8], viene associata ad uno spazio sopragrafico, anche di dimensione *infinita*, tutta una famiglia di topologie, assumendone come sottobasi per i chiusi — oltre alla totalità completa dei sottospazi (topologia $\mathcal{A}(S)$) — totalità più ristrette: quella dei sottospazi di dimensione finita (topologia $\mathcal{A}_f(S)$), quella dei sottospazi di una fissata dimensione finita h con $-1 \leq h \leq \dim S$ (topologia $\mathcal{A}_h(S)$). Per tali topologie vengono studiate proprietà di confronto, di noetherianità, di quasicompattezza, di separazione, di riducibilità e di connessione, ottenendo risultati alquanto dissimili dalle (a)-(e) ed in parte imprevisi.

(*) Lavoro svolto nell'ambito della Sez. n. 4 del GNSAGA del CNR.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1976.

Nel n. 4 (Nota II) vengono introdotte varie categorie aventi come classe di oggetti gli spazi sopragrafici (rispettivamente quasigrafici o grafici), scegliendo poi opportunamente la classe dei morfismi ammissibili: applicazioni che conservano gli allineamenti; ovvero tali che la controimmagine di un sottospazio risulti un sottospazio; ovvero continue per la topologia $\mathcal{A}(S)$. Al riguardo vengono effettuati i necessari raffronti fra tali categorie (n. 4.2-4.7). In tale ordine di idee, dalla 3.11 (a) si ricava che il funtore $\mathcal{A}(\)$ pone una equivalenza fra la categoria degli spazi sopragrafici (rispetto alle applicazioni continue) e quella degli spazi topologici di Fréchet (rispetto alle funzioni continue). Si dimostra poi (n. 4.10) l'esistenza dei limiti diretti di sistemi diretti di spazi grafici e applicazioni lineari; e si prova infine che il funtore che fa passare dagli spazi vettoriali agli spazi proiettivi conserva i limiti diretti (n. 4.12), mentre $\mathcal{A}(\)$ è un funtore dalla categoria degli spazi grafici a Top che conserva i coprodotti ma non i limiti diretti (n. 4.13).

2. COMPLEMENTI SUGLI SPAZI SOPRAGRAFICI, QUASIGRAFICI E GRAFICI

2.1. Ricordiamo che in [1] è stato definito uno spazio sopragrafico (s.sg.) come una coppia $(S, \bar{S})$ ove S è un insieme di elementi (punti) ed $\bar{S}$ è una totalità di sottoinsiemi (s.i.) di S , da dirsi spazi subordinati (s.s.) di S , per modo che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

$$(a) \quad \emptyset, S \in \bar{S}; \quad x \in S \Rightarrow \{x\} \in \bar{S};$$

$$(b) \quad \text{per ogni famiglia } \{S^{(i)}\}_{i \in I} \text{ con } S^{(i)} \in \bar{S}, \text{ risulta } \bigcup_{i \in I} S^{(i)} \in \bar{S}.$$

In virtù di (b) rimane definito il reticolo $S(\cap, \cup)$ assumendo

$$(X, Y \in \bar{S}) \quad X \cup Y = \bigcup_{Z \in \bar{S}, Z \supseteq X, Y} Z = \text{s.s. «congiungente» } X \text{ ed } Y.$$

$$(c) \quad X \in \bar{S}, x \in S \rightarrow X \ni x \vee X \vdash x \quad (\text{ove } \vdash \text{denota la relazione di copertura}).$$

Per abuso di linguaggio si dice anche che S è uno s.sg. Se $S' \in \bar{S}$, anche S' risulta uno s.sg.: $(S', \bar{S}')$, assumendo $\bar{S}' = \{X \in \bar{S} \mid X \subseteq S'\}$.

Ad ogni s.sg. S , come pure ad ogni suo s.s. $X \in \bar{S}$, resta associata la rispettiva dimensione, $\dim S$ e $\dim X$, finita o infinita. Uno s.s. h -dimensionale di uno s.sg. S viene denotato con S_h : gli S_0 sono i punti, gli S_1 si chiamano *rette*, ecc.

2.2. Seguendo [1], uno spazio quasigrafico (s.qg.) può definirsi come uno s.sg. $(S, \bar{S})$ tale che i suoi s.s. $X \in \bar{S}$ sono tutti e soli i s.i. di S ciascuno dei quali accanto a due suoi punti distinti qualsiasi contenga la retta loro congiungente.

2.3. Finalmente uno spazio grafico (s.g.) può definirsi come una coppia (S, S_1) ove S è un insieme di elementi (punti) ed S_1 è una totalità di s.i. di S , da dirsi *rette* di S , per modo che:

(α) Ogni retta contiene almeno due punti distinti. Due punti distinti qualsiasi di S appartengono ad una e ad una sola retta di S , detta la loro congiungente.

(β) Ogni retta, che incontra fuori dai vertici due lati di un triangolo, incontra anche il terzo lato.

2.4. Ogni s.g. (S, S_1) risulta uno s.qg. $(S, \bar{S})$, qualora si definisca $\bar{S}$ come la totalità dei s.i. di S ciascuno dei quali accanto a due suoi punti distinti qualsiasi contenga la retta loro congiungente.

2.5. Sia S uno spazio grafico. Introduciamo in S la seguente relazione ternaria $L = L(S)$:

$$L(S): (x, y, z) \in S^3, \quad (x, y, z) \in L(S) \iff x, y, z \text{ allineati in } S.$$

Evidentemente $L = L(S)$ verifica le proprietà:

$$L_1: x, y, z \in S, \quad |\{x, y, z\}| < 3 \iff (x, y, z) \in L;$$

$$L_2: x, y, z \in S, \quad (x, y, z) \in L \iff L \ni (y, x, z), (x, z, y), (z, y, x);$$

- $L_3: x, y, z, z' \in S, \quad (x, y, z), (x, y, z') \in L \Rightarrow (x, z, z') \in L;$
 $L_4: x, y, z, y', z' \in S, \quad (x, y, z) \notin L, (x, y, z'), (x, y', z) \in L, x \neq z' \neq y,$
 $x \neq y' \neq z \Rightarrow \exists x' \in S \text{ t.c. } (x', y, z), (x', y', z') \in L.$

Viceversa, sia S un insieme affatto qualunque, nel quale sia definita una relazione astratta ternaria L soddisfacente $L_1 - L_4$. Allora esiste in S una e una sola struttura di spazio grafico $(S, \bar{S}_1)$ tale che $L = L(S)$.

L'unicità è ovvia, perché se S è dotata di una struttura di s.g. t.c. $L = L(S)$, allora le rette di S sono determinate da L :

$$(0) \quad S_1 \text{ retta di } S \Leftrightarrow \exists x, y \in S_1, x \neq y \text{ t.c.} \quad S_1 = \{z \in S \mid (x, y, z) \in L\}.$$

Alla dimostrazione dell'esistenza, premettiamo il seguente

LEMMA. Sia S un insieme affatto qualunque nel quale sia definita una relazione ternaria L soddisfacente $L_1 - L_4$. Se $x, y \in S, x \neq y$, definiamo

$$S_1(x, y) = \{z \in S \mid (x, y, z) \in L\}.$$

Allora

- (1) $S_1(x, y) \ni x, y;$
 (2) $S_1(x, y) = S_1(y, x);$
 (3) $x' \in S_1(x, y), x' \neq y \Rightarrow S_1(x, y) = S_1(x', y);$
 (4) $x', y' \in S_1(x, y), x' \neq y' \Rightarrow S_1(x, y) = S_1(x', y').$

Dimostrazione. (1) Subito da L_1 . (2) Subito da L_2 . (3) Anzitutto $S_1(x, y) \subseteq S_1(x', y): z \in S_1(x, y) \Rightarrow z \in S_1(x', y)$ perché: $x', z \in S_1(x, y) = S_1(y, x) \Rightarrow L \ni (y, x, x'), (y, x, z) \Rightarrow L \ni (y, x', z)$ per $L_3 \Rightarrow L \ni (x', y, z)$ per $L_2 \Rightarrow z \in S_1(x', y)$. Si ha anche $S_1(x', y) \subseteq S_1(x, y)$, scambiando x con x' in quanto precede (lecito per L_2 e perché $x \neq y$). (4) Se sussiste una delle uguaglianze $x' = x, y' = y, x' = y, y' = x$, la (4) segue dalla (3). Altrimenti applicando ripetutamente la (3) si ha: $S_1(x, y) = S_1(x', y) = S_1(x', y')$.

Torniamo ora alla parte esistenziale del Teorema 2.5. Definiamo in S le rette tramite la (0), e verifichiamo le (α), (β) di 2.3.

(α) Ogni retta contiene almeno due punti distinti per (0) e per L_1 . Se $x, y \in S$ con $x \neq y$, allora, con le notazioni del Lemma, $S_1(x, y)$ è l'unica retta per x, y , perché se $x, y \in S_1(x', y')$ risulta $S_1(x, y) = S_1(x', y')$ in forza della (4) del Lemma.

(β) Siano dati un triangolo xyz (cioè $x, y, z \in S$ con $(x, y, z) \notin L$) ed una retta S_1 incontrante ad esempio i lati $S_1(x, y)$ ed $S_1(x, z)$ in punti z', y' con $x \neq z' \neq y$ ed $x \neq y' \neq z$: Allora $y' \neq z'$, come subito visto, e la suddetta retta S_1 è la $S_1 = S_1(y', z')$. Si ha dunque.

$$\begin{aligned} & (x, y, z) \notin L, (x, y, z'), (x, z, y') \in L, x \neq z' \neq y, x \neq y' \neq z \Rightarrow \\ & \Rightarrow (x, y, z) \notin L, (x, y, z'), (x, y', z) \in L \text{ (per } L_2), x \neq z' \neq y, x \neq y' \neq z \Rightarrow \\ & \Rightarrow \exists x' \in S \text{ t.c. } (x', y, z), (x', y', z') \in L \text{ (per } L_4) \Rightarrow S_1(y, z) \cap S_1(y', z') = x', \end{aligned}$$

e tutto è dimostrato.

N.B. In quest'ordine d'idee, è facile caratterizzare tramite la relazione L i piani grafici, i piani grafici non degeneri, i piani proiettivi, i piani desarguesiani, gli spazi proiettivi.

2.6. (Risposta al Problema 1.1 posto in [1]). *Esistono s.sg. $(S, \bar{S})$ con $\dim S = \infty$, tali che $\bar{S}$ non è complementato e quindi neppure relativamente complementato. Invero basta assumere, in un insieme infinito S , come totalità $\bar{S}$ degli s.s. di S , i s.i. finiti di S ed S stesso. Si noti che S non risulta uno s.gg. (e quindi neppure uno s.g.) in accordo con la 3.1 di [1]. Si noti anche che in S non esistono iperpiani, cioè s.s. X t.c. $S \vdash X$.*

2.7. *Siano S uno s.sg., S_k un suo s.s. ed $x \in S - S_k$. Per ogni h con $k < h < \dim S$, esiste qualche s.s. S_h tale che $S_k \subset S_h \ni x$.*

Invero, sia $S_{k+1} = S_k \vee x$ e sia $x' \in S - S_{k+1}$. Allora $x \notin S'_{k+1} = S_k \vee x'$ perché S è sopra-grafico (cfr. [1], p. 5); iterando il procedimento, si perviene a spazi $S'_{k+2}, S'_{k+3}, \dots, S_h$, ciascuno dei quali contiene S_k e non x .

2.8. Siano S uno s.sg. ed S_k un suo s.s. Per ogni h con $k < h < \dim S$, l' S_k si può ottenere come intersezione di una famiglia di s.s. S_h (e.g. quella degli S_h passanti per S_k).

Invero posto $H = \{S_h \in \bar{S} \mid S_h \supset S_k\}$, si ha $S_k \subseteq \bigcap_{S_h \in H} S_h$; se $x \in S - S_k$ esiste un $S_h \in \bar{S}$ tale che $S_k \subset S_h \nexists x$ per 2.7.

2.9. Siano dati due s.sg. $(S', \bar{S}')$ ed $(S'', \bar{S}'')$ tali che $S' \cap S'' = \emptyset$. Definiamo $(S, \bar{S})$ assumendo $S = S' \cup S''$, $\bar{S} = \{X' \cup X'' \mid X' \in \bar{S}', X'' \in \bar{S}''\}$. In tal modo $(S, \bar{S})$ diviene uno s.sg., che si chiama il composto dei dati, e scriviamo $S = S' \oplus S''$. Se S', S'' sono s.qg. (risp. s.g.), tale risulta $S' \oplus S''$. Uno s.sg. $(S, \bar{S})$ si dirà geometricamente irriducibile o riducibile a seconda che non esistano od esistano s.s. $S', S'' \in \bar{S}$ tali che

$$S' \neq S \neq S'', \quad S' \cap S'' = \emptyset, \quad S = S' \oplus S''.$$

Sia $(S, \bar{S})$ uno s.sg., e siano $S', S'', X \in \bar{S}$; se $S = S' \oplus S''$ e se X è geometricamente irriducibile, allora $X \subseteq S'$ ovvero $X \subseteq S''$. Da ciò segue facilmente che: uno s.sg. $(S, \bar{S})$ di dimensione finita o è geometricamente irriducibile o può ottenersi in modo unico come composto di un numero finito di suoi s.s. geometricamente irriducibili.

Queste nozioni e risultati estendono quelli ben noti relativi agli spazi grafici (cfr. B. Segre [5], p. 142).

2.10. Uno s.sg. $(S, \bar{S})$ si dirà topologicamente irriducibile se

$$S = S' \cup S'' \quad \text{con } S', S'' \in \bar{S} \Rightarrow S' = S \quad \text{vel } S'' = S,$$

mentre si dirà topologicamente riducibile nel caso contrario, cioè se esistono $S', S'' \in \bar{S}$ tali che $S = S' \cup S''$ con $S' \subset S$ ed $S'' \subset S$ (1).

Evidentemente uno s.sg. geometricamente riducibile lo è anche topologicamente (e non viceversa), e quindi uno s.sg. topologicamente irriducibile lo è anche geometricamente (e non viceversa). Se $(S, \bar{S})$ è uno s.sg., e se $X, Y, Z \in \bar{S}$, e se inoltre X è topologicamente irriducibile ed $X \subseteq Y \cup Z$, allora $X \subseteq Y$ vel $X \subseteq Z$. Da ciò segue che: uno s.sg. di dimensione finita può ottenersi in modo unico come unione finita di suoi s.s. topologicamente irriducibili.

3. TOPOLOGIE ASSOCIATE AD UNO SPAZIO SOPRAGRAFICO

3.1. In un qualsiasi s.sg. $S = (S, \bar{S})$ restano definite le seguenti topologie:

$\mathcal{A}(S) =$ topologia per cui una sottobase dei chiusi è data da $\bar{S}$, cioè dalla totalità degli s.s. di S ;

$\mathcal{A}_{(f)}(S) =$ topologia per cui una sottobase dei chiusi è data da $\bar{S}_{(f)}$, cioè dalla totalità degli s.s. di dimensione finita di S ;

$\mathcal{A}_h(S) =$ topologia per cui una sottobase dei chiusi è data da $\bar{S}_h$, cioè dalla totalità degli s.s. h -dimensionali di S (h intero fissato, — $1 \leq h \leq \dim S$).

(1) Quando $(S, \bar{S})$ è dato da uno spazio lineare S e dalla totalità $\bar{S}$ delle varietà algebriche di S , queste nozioni si riducono a quelle usuali relative alle varietà algebriche (cfr. B. Segre [6], p. 108).

In tali topologie i chiusi sono rispettivamente i s.i. C di S del tipo:

- (a) in $\mathcal{A}(S)$, $C = \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in F_j} S^{(i)}$ (F_j finito $\forall j \in J$, $S^{(i)} \in \bar{S}$);
- (b) in $\mathcal{A}_{(f)}(S)$, $C = S$ ovvero $C = \bigcup_{i \in F} S^{(i)}$ (F finito, $S^{(i)} \in \bar{S}$, $\dim S^{(i)} < \infty$);
- (c) in $\mathcal{A}_h(S)$ con $-1 \leq h < \dim S$, $C = S$ ovvero $C = \bigcup_{i \in F} S^{(i)}$ (F finito, $S^{(i)} \in \bar{S}$, $\dim S^{(i)} \leq h$);
- (d) in $\mathcal{A}_h(S)$ con $h = \dim S$, $C = S$ ovvero $C = \emptyset$.

Dimostrazione. (a) Per definizione di sottobase dei chiusi.

(b) Se $\dim S = r < \infty$, si può ripetere, in virtù della 2.4 di [1], l'argomento usato in G. Tallini [8], n. 2. Sia $\dim S = \infty$. Se $C \neq S$ è un chiuso, per definizione di sottobase risulta:

$$C = \bigcap_{j \in J} C_j \quad \text{ove } J \neq \emptyset \text{ e } C_j = \bigcup_{i \in F_j} S^{(i)} \quad (F_j \text{ finito, } S^{(i)} \in \bar{S}, \dim S^{(i)} < \infty).$$

Per ogni $j \in J$, C_j è contenuto in uno s.s. S_{n_j} di S di dimensione finita n_j in virtù della 2.5 di [1]; fissato un indice $k \in J$, risulta:

$$C = \bigcap_{j \in J} C_j = C_k \cap \left(\bigcap_{j \in J - \{k\}} C_j \right) = C_k \cap \left(\bigcap_{j \in J - \{k\}} (C_j \cap S_{n_k}) \right)$$

e si ottiene l'asserto applicando alla spazio S_{n_k} quanto stabilito sopra.

(c) Dalla (b) e dalla 2.4 di [1] segue senz'altro che:

(c') se C è un chiuso in $\mathcal{A}_h(S)$ con $-1 \leq h < \dim S$, allora $C = S$ ovvero $C = \bigcup_{i \in F} S^{(i)}$ con F finito, $S^{(i)} \in \bar{S}$, $\dim S^{(i)} \leq h$.

Occorre provare che, viceversa,

(c'') se $C = \bigcup_{i \in F} S^{(i)}$ con F finito, $S^{(i)} \in \bar{S}$, $\dim S^{(i)} \leq h < \dim S$, allora C è un chiuso di $\mathcal{A}_h(S)$.

Orbene, se $\forall i \in F \dim S^{(i)} = h$, la (c'') è banalmente vera; se poi qualche $S^{(i)}$ ha dimensione $k < h$, $S^{(i)}$ risulta un chiuso di $\mathcal{A}_h(S)$ perché si può ottenere come intersezione di s.s. h -dimensionali in virtù di 2.8.

(d) Banale.

3.2. Sia S uno s.sg. Risulta

(a) Per ogni intero h con $-1 \leq h < \dim S$

$$\mathcal{A}_{-1}(S) \leq \mathcal{A}_0(S) \leq \mathcal{A}_1(S) \leq \dots \leq \mathcal{A}_h(S) \leq \mathcal{A}_{(f)}(S) \leq \mathcal{A}(S).$$

(b) Per $h = \dim S$, $\mathcal{A}_h(S) = \{\emptyset, S\}$.

(c) $\mathcal{A}_{(f)}(S) = \mathcal{A}(S) \iff$ ogni s.s. proprio di S ha dimensione finita.

(d) $\dim S = r < \infty \iff \mathcal{A}_{r-1}(S) = \mathcal{A}_{(f)}(S) = \mathcal{A}(S)$.

(e) $\mathcal{A}_h(S) = \mathcal{A}_{h+1}(S) \iff$ ogni s.s. S_{h+1} di S è unione di un numero finito di s.s. S_d di S con $d \leq h$.

Dimostrazione. È tutto banale in forza di 3.1.

N.B. La (c) di 3.2 e l'esempio di s.sg. detto in 2.6 mostrano che per uno s.sg. S la condizione $\dim S < \infty$ (implica ma) non equivale alla condizione $\mathcal{A}_{(f)}(S) = \mathcal{A}'(S)$.

3.3. Siano $S = (S, \bar{S})$ uno s.sg. ed $S' = (S', \bar{S}')$ uno s.s. di S . Allora

- (a) $\mathcal{A}(S') = S' \cap \mathcal{A}(S)$;
- (b) $\mathcal{A}_{(f)}(S') = S' \cap \mathcal{A}_{(f)}(S)$;
- (c) $h < \dim S' \Rightarrow \mathcal{A}_h(S') = S' \cap \mathcal{A}_h(S)$.

Dimostrazione. (a) e (b) seguono dalle definizioni all'inizio di 3.1 e dalle: $\bar{S}' = S' \cap \bar{S}$, $\bar{S}'_{(f)} = S' \cap \bar{S}_{(f)}$.

(c) Dalla $\bar{S}'_h \subseteq S' \cap \bar{S}_h$ segue $\mathcal{A}_h(S') \subseteq S' \cap \mathcal{A}_h(S)$; l'inclusione contraria segue poi dalla (c) di 3.1.

3.4. Sia $A = S - S'$ lo spazio affine ottenuto da uno spazio proiettivo S e da un suo iperpiano S' . Allora $\mathcal{A}(A) = A \cap \mathcal{A}(S)$, $\mathcal{A}_{(f)}(A) = A \cap \mathcal{A}_{(f)}(S)$, $\mathcal{A}_h(A) = A \cap \mathcal{A}_h(S)$.

3.5. Sia S un qualunque s.sg. Allora:

- (a) $\mathcal{A}_0(S)$ è la topologia cofinita;
- (b) S è finito $\Leftrightarrow \mathcal{A}_0(S)$ è la topologia discreta;
- (c) S è finito $\Rightarrow \mathcal{A}_0(S) = \dots = \mathcal{A}_h(S) = \mathcal{A}_{(f)}(S) = \mathcal{A}(S)$ è la topologia discreta $\forall h, 0 \leq h < \dim S$.

3.6. Sia $S = (S, \bar{S})$ un qualunque s.sg. Le condizioni seguenti sono equivalenti:

- (a) $\mathcal{A}_0(S) = \mathcal{A}(S)$,
- (b) $X \in \bar{S}, X \neq S \Rightarrow X$ è finito,
- (c) C chiuso di $\mathcal{A}(S), C \neq S \Rightarrow C$ è finito.

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b). $X \in \bar{S}, X \neq S \Rightarrow X$ chiuso di $\mathcal{A}(S), X \neq S \Rightarrow X$ chiuso di $\mathcal{A}_0(S), X \neq S$ per (a) $\Rightarrow X$ è finito per 3.5 (a).

(a) $\Leftrightarrow$ (c) per 3.5 (a).

(b) $\Rightarrow$ (c). C chiuso di $\mathcal{A}(S), C \neq S \Rightarrow C = \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in F_j} S^{(i)}(F_j \text{ finito } \forall j \in J, S^{(i)} \in \bar{S}) \Rightarrow C \subseteq C_j = \bigcup_{i \in F_j} S^{(i)} \forall j \in J$. Poiché $C \neq S, \exists h \in J$ t.c. $C_h \neq S$; risulta quindi $C_h = \bigcup_{i \in F_h} S^{(i)}$ ove ogni $S^{(i)}$ è finito per (b). Così $C \subseteq C_h$ è finito.

N.B. In base a 2.6, le condizioni di 3.6 non implicano che S sia finito e neppure che $\dim S < \infty$.

3.7. Sia $(S, \bar{S})$ uno s.sg. Allora la topologia $\mathcal{A}_{(f)}(S)$ è noetheriana.

Dimostrazione. Si tratta di provare che ogni catena decrescente

$$(1) \quad C^1 \supseteq C^2 \supseteq \dots \supseteq C^h \supseteq C^{h+1} \supseteq \dots$$

di chiusi di $\mathcal{A}_{(f)}(S)$ è stazionaria. Non è restrittivo (per l'ultima Prop. di 2.10) supporre che ogni chiuso in (1) venga dato come:

$$(2)^h \quad C^h = \bigcup_{i \in F_h} S^{(i)} \quad (F_h \text{ finito, } S^{(i)} \in \bar{S}, \dim S^{(i)} < \infty)$$

ove gli s.s. $S^{(i)}$ sono topologicamente irriducibili; e possiamo anche evidentemente supporre che: $i, j \in F_h, i \neq j \Rightarrow S^{(i)} \neq S^{(j)}$.

Sia C_d^h l'unione degli s.s. d -dimensionali ($d \geq 0$) che figurano in $(2)^h$, ossia degli s.s. d -dimensionali appartenenti alla famiglia $\{S^{(i)}\}_{i \in F_h}$, e sia C'^h l'unione dei rimanenti s.s. in $(2)^h$, per modo che:

$$(3) \quad \text{per ogni } h \geq 1, \quad C^h = C_d^h \cup C'^h, \dim C'^h < d$$

ove si è posto $d = \dim C^h = \max_{i \in F_h} \{\dim S^{(i)}\}$, e analogamente per $\dim C'^h$. Proviamo allora l'asserto procedendo per induzione sull'intero $\dim C^1$. Se $\dim C^1 = 0$, C^1 è un gruppo finito di punti, onde la (1) è manifestamente stazionaria. Sia allora $\dim C^1 = d > 0$ e supponiamo che una catena del tipo (1) sia stazionaria ogni qual volta la dimensione del primo chiuso della catena risulti minore di d . La (1) dà luogo alla catena

$$(1)_d \quad C_d^1 \supseteq C_d^2 \supseteq \dots \supseteq C_d^h \supseteq C_d^{h+1} \supseteq \dots$$

che risulta stazionaria in virtù della penultima prop. dopo 2.10 e della 2.4 di [1]; in altri termini esiste un intero $H \geq 1$ tale che

$$(4)_d \quad C_d^H = C_d^{H+1} = C_d^{H+2} = \dots$$

potendo eventualmente essere $C_d^H = \emptyset$. Consideriamo la sottocatena di (1)

$$(4) \quad C^H \supseteq C^{H+1} \supseteq C^{H+2} \supseteq \dots$$

e scriviamola, usando la (3), nella forma

$$(4') \quad C_d^H \cup C'^H \supseteq C_d^{H+1} \cup C'^{H+1} \supseteq C_d^{H+2} \cup C'^{H+2} \supseteq \dots \quad (\text{ove } \dim C'^H < d).$$

In virtù di $(4)_d$, della penultima Prop. di 2.10 e del fatto che nessuno spazio che figura in $(2)^h$ è contenuto in alcuno dei rimanenti, dalla $(4')$ si trae la catena

$$C'^H \supseteq C'^{H+1} \supseteq C'^{H+2} \supseteq \dots \quad (\text{ove } \dim C'^H < d)$$

la quale è stazionaria per l'ipotesi induttiva. Quindi risulta stazionaria la $(4')$ ossia la (4) e quindi anche la (1).

3.8. Sia $(S, \bar{S})$ uno s.sg. La condizione $\dim S < \infty$ implica ma non equivale a quella che $\mathcal{A}(S)$ sia noetheriana.

Dimostrazione. Se $\dim S < \infty$, $\mathcal{A}(S) = \mathcal{A}_{(f)}(S)$, che è noetheriana per 3.7. Lo s.sg. S detto in 2.6 è tale che: $\mathcal{A}(S) = \mathcal{A}_{(f)}(S)$ (per la (c) di 3.2), $\mathcal{A}(S) = \mathcal{A}_{(f)}(S)$ è noetheriana per 3.7, $\dim S = \infty$.

Ciò suggerisce il problema di caratterizzare in modo intrinseco gli s.sg. S per cui $\mathcal{A}(S)$ sia noetheriana.

3.9. La topologia $\mathcal{A}_{(f)}(S)$ associata ad uno s.sg. S è quasicompatta.

Dimostrazione. L'asserto segue subito da 3.7 e dalla Prop. 1 (a) di J. P. Serre [7], p. 223.

Altrimenti si può ragionare nel modo seguente. Sia $C \neq S$ un chiuso di $\mathcal{A}_{(f)}(S)$. Allora $C = S^{(k_1)} \cup S^{(k_2)} \cup \dots \cup S^{(k_l)}$; ogni $S^{(k_i)}$ è quasicompatto in $\mathcal{A}_{(f)}(S^{(k_i)}) = \mathcal{A}_{(f)}(S) \cap S^{(k_i)}$ (per la (b) del n. 1), onde C è quasicompatto. Poiché ogni chiuso di $\mathcal{A}_{(f)}(S)$ è quasicompatto, la topologia $\mathcal{A}_{(f)}(S)$ è quasicompatta (cfr. G. Tallini [8], Prop. V).

3.10. La topologia $\mathcal{A}(S)$ associata ad uno s.sg. $(S, \bar{S})$ non è necessariamente quasicompatta e quindi neppure noetheriana.

Dimostrazione. L'asserto si ha subito dalla seconda parte della (a) di 3.11. Per gli s.g. diamo il seguente esempio. Sia $(S, \bar{S})$ lo spazio proiettivo associato alla spazio vettoriale V delle successioni di elementi di un campo K . Denotiamo con x il punto di S associato ad un vettore $(x_0, x_1, \dots)$ di V . In S abbiamo la famiglia $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di chiusi di $\mathcal{A}(S)$ dati da: $C_i = \{x \in S \mid x_i = 0\}$; per tale famiglia risulta

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i = \emptyset, \quad \text{ma per ogni s.i. finito } F \subset \mathbb{N} \quad \bigcap_{j \in F} C_j \neq \emptyset.$$

N.B. Da 3.8, 3.9 segue che per uno s.sg. S la condizione $\dim < \infty$ implica ma non equivale a quella che $\mathcal{A}(S)$ sia quasicompatto.

3.11. Sia $(S, \bar{S})$ uno s.sg. Allora:

(a) $\mathcal{A}_0(S)$ è T_1 ; pertanto risultano T_1 anche le topologie più fini di quella $\mathcal{A}_1(S), \dots, \mathcal{A}_h(S), \mathcal{A}_{(f)}(S), \mathcal{A}(S)$ per ogni h con $0 \leq h < \dim S$. Viceversa ogni topologia T_1 risulta la topologia $\mathcal{A}(S)$ associata a qualche s.sg. S .

(b) Una fra le topologie $\mathcal{A}_0(S), \mathcal{A}_1(S), \dots, \mathcal{A}_h(S), \mathcal{A}_{(f)}(S)$ ($0 \leq h < \dim S$) è $T_2 \iff$ ciascuna di esse è $T_2 \iff$ ciascuna di esse è discreta $\iff S$ è finito.

(c) S è finito $\Rightarrow \mathcal{A}(S)$ è discreta e quindi T_2 .

(d) $\mathcal{A}(S)$ è $T_2 \iff$ per ogni $x, y \in S$ con $x \neq y$, lo spazio S può ottenersi, come unione finita di suoi s.s. (necessariamente propri):

$$S = \left(\bigcup_{i \in F} S^{(i)} \right) \cup \left(\bigcup_{h \in H} S^{(h)} \right) \quad (F, H \text{ finiti})$$

in modo che $x \notin \bigcup_{i \in F} S^{(i)}$ ed $y \notin \bigcup_{h \in H} S^{(h)}$.

Dimostrazione. (a) Ogni punto di S è chiuso in $\mathcal{A}_0(S)$. Viceversa, se $(S, \mathcal{A})$ è uno spazio topologico T_1 , $(S, \bar{S})$ con $\bar{S} = \{S - A\}_{A \in \mathcal{A}}$ è uno s.sg. ed $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S)$.

(b) S finito $\Rightarrow$ ciascuna di quelle topologie è discreta (per 3.5. (c)) $\Rightarrow$ ciascuna di esse è $T_2 \Rightarrow$ una fra esse è T_2 . Viceversa: una fra quelle topologie è $T_2 \Rightarrow \mathcal{A}_{(f)}(S)$ (che ne è la più fine) è $T_2 \Rightarrow$ esistono due aperti non vuoti di $\mathcal{A}_{(f)}(S)$ ad intersezione vuota $\Rightarrow$ esistono due chiusi propri di $\mathcal{A}_{(f)}(S)$ che ricoprono $S \Rightarrow S$ è ricoperto da una totalità finita di suoi s.s. (propri e) di dimensione finita, ciascuno dei quali essendo T_2 al pari di S risulta finito in virtù della (c) del n. 1 $\Rightarrow S$ è finito $\Rightarrow$ ecc.

(c) Segue da 3.5 (c).

(d) Notiamo intanto che, se $\mathcal{B}$ è una base di aperti per un qualunque spazio topologico S , la topologia di S risulta T_2 se e solo se per ogni $x, y \in S$ con $x \neq y$ esistono aperti $B_1 \ni x, B_2 \ni y$ di $\mathcal{B}$ tali che $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Applicando ciò alla topologia $\mathcal{A}(S)$ di $(S, \bar{S})$ in relazione alla sua base costituita dai s.i. di S del tipo

$$\mathcal{C}_S \left(\bigcup_{i \in F} S^{(i)} \right) \quad (\text{al variare di } F \text{ finito e di } S^{(i)} \in \bar{S})$$

si ottiene: $\mathcal{A}(S)$ è $T_2 \iff$ per ogni $x, y \in S$ con $x \neq y$ esistono insiemi finiti F, H e s.s. $S^{(i)}, S^{(h)} \in \bar{S}$ t.c.

$$x \in \mathcal{C}_S \left(\bigcup_{i \in F} S^{(i)} \right), \quad y \in \mathcal{C}_S \left(\bigcup_{h \in H} S^{(h)} \right), \quad \mathcal{C}_S \left(\bigcup_{i \in F} S^{(i)} \right) \cap \mathcal{C}_S \left(\bigcup_{h \in H} S^{(h)} \right) = \emptyset$$

$\iff$ per ogni x, y, S con $x \neq y$ esistono due totalità finite $\{S^{(i)}\}_{i \in F}, \{S^{(h)}\}_{h \in H}$ di s.s. $S^{(i)}, S^{(h)} \in \bar{S}$ tali che valga la relazione detta in (d).

N.B. Per $(S, \bar{S})$ come nell'esempio 2.6, $\mathcal{A}(S)$ non è T_2 , perché S non può essere unione di un numero finito di suoi s.i. finiti (cfr. 3.11 (d)).

Per uno s.sg. $(S, \bar{S})$ la condizione « $\mathcal{A}(S)$ è T_2 » non implica « $\mathcal{A}_{(f)}(S)$ è T_2 »: se S è uno spazio topologico infinito e T_2 , e se $\bar{S}$ denota la totalità dei suoi chiusi, allora $(S, \bar{S})$ risulta uno s.sg. ed $\mathcal{A}(S)$ è T_2 ; ma $\mathcal{A}_{(f)}(S)$ non risulta T_2 , a norma di 3.11 (b), perché S è infinito.

3.12. Sia $(S, \bar{S})$ uno s.sg. Allora $\mathcal{A}(S)$ (risp. $\mathcal{A}_{(f)}(S)$) è una topologia riducibile se e solo se S è unione finita di suoi s.s. (risp. di suoi s.s. di dimensione finita). Inoltre se $(S, \bar{S})$ è topologicamente riducibile, allora $\mathcal{A}(S)$ è riducibile.

3.13. Sia $(S, \bar{S})$ uno s.sg. Allora

(a) $\mathcal{A}(S)$ connessa $\Rightarrow S$ geometricamente irriducibile.

(b) $\mathcal{A}_0(S)$ connessa $\iff S$ infinito.

(c) $\mathcal{A}_{(f)}(S)$ sconnessa $\Rightarrow \dim S < \infty$.

(d) $(S, \bar{S})$ s.qg. & $\mathcal{A}(S)$ sconnessa $\Rightarrow$ esiste almeno una retta finita;

(e) $(S, \bar{S})$ s.g. & $\mathcal{A}(S)$ sconnessa $\Rightarrow S$ geometricamente riducibile oppure ogni s.s. di dimensione finita è finito.

Dimostrazione. (a), (b) subito per assurdo. (c) $\mathcal{A}_{(f)}(S)$ sconnessa $\Rightarrow S$ è unione di un numero finito di s.s. di dimensione finita $\Rightarrow S$ è il congiungente di quegli spazi $\Rightarrow \dim S < \infty$ (cfr. [1], 2.5). (d) $\mathcal{A}(S)$ sconnessa $\Rightarrow$ esistono chiusi non vuoti C, D di $\mathcal{A}(S)$ t.c. $C \cap D = \emptyset$, $C \cup D = S$. Fissiamo $x \in C$, $y \in D$, e sia

$$C = \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in F_j} S^{(i)}, \quad D = \bigcap_{l \in L} \bigcup_{h \in H_l} S^{(h)} \quad (F_j, H_l \text{ finiti}, S^{(i)}, S^{(h)} \in \bar{S}).$$

Poiché $y \notin C$ ed $x \notin D$, è possibile fissare $j' \in J$ ed $l' \in L$ t.c.

$$y \notin \bigcup_{i \in F_{j'}} S^{(i)}, \quad x \notin \bigcup_{h \in H_{l'}} S^{(h)}.$$

La retta $x \vee y$ è contenuta in $S = \bigcup_{i \in F_{j'}} S^{(i)} \cup \bigcup_{h \in H_{l'}} S^{(h)}$ ed interseca ogni $S^{(i)}$ (risp. ogni $S^{(h)}$) in al più un punto, altrimenti sarebbe contenuta in quell' $S^{(i)}$ (risp. in quell' $S^{(h)}$) (perché S è s.qg.) mentre $y \notin S^{(i)}$ (risp. $x \notin S^{(h)}$). Dunque $|x \vee y| \leq |F_{j'}| + |H_{l'}| < \infty$. (e) S s.g. & $\mathcal{A}(S)$ sconnessa $\Rightarrow S$ s.qg. & $\mathcal{A}(S)$ sconnessa $\Rightarrow$ (per (d)) esiste una retta finita. Distinguiamo i seguenti casi:

1° caso: ogni retta ha due punti. Allora $\bar{S} = P(S)$, onde ogni s.s. h -dimensionale è finito con $h - 1$ punti.

2° caso: esistono rette con due punti e rette con almeno tre punti. Allora S è geometricamente riducibile (perché si può ripetere per S che è s.g. il ragionamento fatto in B. Segre [5], p. 144).

3° caso: ogni retta ha almeno tre punti. Allora si può ripetere per S che è s.g. il ragionamento fatto in B. Segre [5], p. 144, concludendo che ogni retta ha un medesimo numero di punti, dunque finito; per induzione su $h \geq 1$, si prova allora che ogni s.s. di dimensione finita h è finito.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. V. CECCHERINI (1967) - Sulla nozione di spazio grafico, « Rend. di Mat. », 26 (5), 1-21.
- [2] P. V. CECCHERINI (1967) - Collineazioni e semicollineazioni fra spazi affini e proiettivi, « Rend. di Mat. », 26 (5), 309-348.
- [3] P. MAROSCIA (1970) - Sugli omomorfismi tra spazi affini o proiettivi, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 49 (7), 244-249.
- [4] P. MAROSCIA (1970) - Semicollineazioni e semicorrelazioni tra spazi lineari, « Rend. di Mat. », 3 (6), 507-521.
- [5] B. SEGRE (1961) - Lectures on modern geometry (with an Appendix by L. Lombardo-Radicé). Roma, Cremonese.
- [6] B. SEGRE (1972) - Prodromi di geometria algebrica. Roma, Cremonese.
- [7] J. P. SERRE (1955) - Faisceau algébriques cohérents, « Ann. of Math. », 61, 197-277.
- [8] G. TALLINI (1971) - Topologia associata ad uno spazio grafico, « Ricerche di Matematica », 253-259.