
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

LAURA CASTELLANO

**Sulla risoluzione di alcune classi di equazioni
quasi-ellittiche ed ellittico-paraboliche di ordine 2 N.**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 61 (1976), n.5, p. 396–400.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_5_396_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Equazioni a derivate parziali. — *Sulla risoluzione di alcune classi di equazioni quasi-ellittiche ed ellittico-paraboliche di ordine 2* N. Nota di LAURA CASTELLANO, presentata (*) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — An existence and uniqueness theorem of Dirichlet's problem for a quasi-elliptic equation is stated; making use of this theorem an evolution equation is also solved.

Utilizzando degli opportuni spazi di Sobolev con peso, M. Troisi [11] ha studiato problemi al contorno per equazioni quasi-ellittiche in un dominio limitato $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_k \subseteq \mathbb{R}^n$. Indicato con A un operatore differenziale lineare quasi-ellittico e con B_{ij} degli operatori differenziali lineari di frontiera, egli ha ottenuto teoremi di esistenza e unicità per il problema

$$Au = f$$

$$B_{ij}u = 0$$

nelle ipotesi, tra le altre, che il coefficiente di u in A sia singolare sulla parte angolosa S della frontiera di Ω oppure che la quasi-ellitticità di A degeneri su S . Egli elimina queste ipotesi nel caso che sia $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, A sia fortemente quasi ellittico e le condizioni al contorno siano quelle di Dirichlet omogenee.

In questa Nota viene presentato un teorema di esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet omogeneo relativo ad un operatore differenziale a coefficienti reali quasi-ellittico non verificante le ipotesi menzionate. Tale teorema, conseguito con tecniche classiche, opportunamente modificando e utilizzando anche risultati di Troisi [11], viene poi adoperato per risolvere, con la teoria dei semigrupp, il problema di Cauchy

$$D_t u + Au = f$$

$$u(0) = u_0$$

in cui A è l'operatore (*non coercivo*) studiato precedentemente. Viene perciò risolto un problema di Dirichlet in $\Omega \times]0, T[$ per una equazione ellittico-parabolica non quasi-ellittica. Nel caso che A sia l'operatore fortemente quasi-ellittico studiato da Troisi tale problema è ancora risolubile e si ha così un nuovo risultato per una equazione quasi-ellittica.

1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ del tipo $\Omega = X \times]a, b[$ con X aperto limitato di $\mathbb{R}^{n-1}$ con frontiera localmente lipschitziana. Per ogni $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ poniamo $x'_n = y$.

(*) Nella seduta del 13 novembre 1976.

Indichiamo con N, M_0 ed M tre numeri interi non negativi tali che N è pari e $N > M_0 \geq M$; consideriamo le n -ple $m = (2N, \dots, 2N, 2M)$ e $q = (1, \dots, 1, \frac{2N}{2M})$ se è $M > 0$, e, per ogni n -pla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ di interi non negativi, poniamo: $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\langle \alpha, q \rangle = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n \frac{2N}{2M}$ se è $M > 0$, $\langle \alpha, q \rangle = |\alpha|$ se è $M = 0$ e $\alpha_n = 0$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$, $D_y^\alpha = D^\alpha$ nel caso $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

Consideriamo quindi l'operatore

$$(1) \quad A(x', D) = \sum_{\langle \alpha, q \rangle \leq N} (-1)^{|\beta|} D^\beta (a_{\alpha\beta}(x') D^\alpha) + (-1)^{M_0} D_y^{M_0} (b(x') D_y^{M_0+1})$$

a coefficienti reali e verificante la seguente condizione di *forte quasi-ellitticità* rispetto al multi-indice m : esiste $\mu \in]0, +\infty[$ tale che

$$(2) \quad \operatorname{Re} \sum_{\substack{\langle \alpha, q \rangle = N \\ \langle \beta, q \rangle = N}} (i)^{\alpha+\beta} a_{\alpha\beta}(x') \xi^{\alpha+\beta} \geq \mu \left(\sum_{k=1}^{n-1} |\xi_k|^{2N} + \delta |\xi_n|^{2M} \right)$$

per ogni $x' \in \bar{\Omega}$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, essendo $\delta = 0$ nel caso $M = 0$.

Osserviamo che A è quasi-ellittico rispetto al multi-indice $m = (2N, \dots, 2N, 2M_0 + 1)$ se, come supponiamo, è $b(x') \neq 0$; poniamo perciò anche $q_0 = (1, \dots, 1, \frac{2N}{2M_0 + 1})$ e $\langle \alpha, q_0 \rangle = (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n \frac{2N}{2M_0 + 1})$.

Sia S_X una parte chiusa della frontiera ∂X di X , poniamo

$$\partial_X \Omega = (\partial X - S_X) \times]a, b[, \quad \partial_a \Omega = X \times \{a\}, \quad \partial_b \Omega = X \times \{b\}$$

ed infine

$$S = \partial \Omega - \{\partial_X \Omega \cup \partial_a \Omega \cup \partial_b \Omega\}.$$

Definiamo poi in $\bar{\Omega}$ la funzione $\rho(x') = \frac{1}{d\sqrt{2}} \operatorname{dist}(x', S)$ dove d è un fissato numero reale > 1 e $\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{x' \in \bar{\Omega}} \operatorname{dist}(x', S)$; per ogni s reale indichiamo con $W_s^{2N}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni reali u tali che $\rho^{s+\langle \alpha, q_0 \rangle - 2N} D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ per $\langle \alpha, q_0 \rangle \leq 2N$, munito della norma:

$$\|u\|_{W_s^{2N}(\Omega)} = \sum_{\langle \alpha, q_0 \rangle \leq 2N} |D^\alpha u|_{s+\langle \alpha, q_0 \rangle - 2N},$$

dove, per ogni r reale si è posto $|u|_r = \|\rho^r u\|_{L^2(\Omega)}$; indichiamo inoltre con $L_s^2(\Omega)$ lo spazio delle funzioni reali u tali che $\rho^s u \in L^2(\Omega)$ munito della norma $|u|_s$.

Al fine di precisare le condizioni su $\partial \Omega$ cui si richiede che soddisfi la soluzione u del problema, osserviamo che l'operatore $A(x', D)$ è *propriamente quasi-ellittico di tipo N su $\partial_X \Omega$ e di tipo $M_0 + 1$ o M_0 su $\partial_a \Omega$ e M_0 o $M_0 + 1$*

su $\partial_b \Omega$ secondo che ivi risulti $b(x') > 0$ oppure $b(x') < 0$, dove per operatore $A(x', D)$ propriamente quasi-ellittico di tipo h su una parte $H \subseteq \partial\Omega$ intendiamo un operatore che goda della seguente proprietà: detta $P_0(x', \xi)$ la parte principale del polinomio associato ad $A(x', D)$, per ogni $x' \in H$, per ogni vettore reale $\xi_1 \neq 0$ tangente in x' ad H e per ogni vettore reale $\xi_2 \neq 0$ normale in x' ad H ed orientato verso l'interno di Ω , l'equazione $P(x', \xi_1 + z\xi_2) = 0$ nell'incognita z ha h radici con parte immaginaria positiva.

Supponiamo che per ogni $x' \in \bar{\Omega}$ sia $b(x') > 0$, il problema di Dirichlet studiato è allora il seguente:

$$(3) \quad u \in W_s^{2N}(\Omega)$$

$$(4) \quad Au + \lambda u = f \quad f \in L_s^2(\Omega), \quad \lambda \text{ reale}$$

$$(5) \quad \begin{array}{lll} \frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} = 0 & \begin{array}{ll} \text{su } \partial_X \Omega & \text{per } k = 0, \dots, N-1 \\ \text{su } \partial_a \Omega & \text{per } k = 0, \dots, M_0 \\ \text{su } \partial_b \Omega & \text{per } k = 0, \dots, M_0-1 \end{array} \end{array}$$

essendo ν il vettore normale esterno ad Ω nel generico punto di $\partial\Omega - S$.

Facciamo le seguenti ipotesi:

a_1) Esiste un ricoprimento di $\partial X - S_X$ costituito da un numero finito di aperti $I_1, \dots, I_k$ di R^{n-1} disgiunti da S_X e tali che ad ogni I_i sia possibile associare un omeomorfismo α_i di classe C^∞ di $\bar{I}_i$ sul cilindro $\{x \in R^{n-1} : x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1, -1 \leq x_{n-1} \leq 1\}$ il quale trasformi $I_i \cap X$ nell'insieme $\{x \in R^{n-1} : x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 < 1, x_{n-1} = 0\}$; sia soddisfatta inoltre la seguente condizione di compatibilità: se $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ esiste un omeomorfismo β_{ij} di classe C^∞ e a Jacobiano positivo di $\alpha_i(I_i \cap I_j)$ su $\alpha_j(I_i \cap I_j)$ tale che $\alpha_j(x) = \beta_{ij}(\alpha_i(x))$ per ogni $x \in I_i \cap I_j$.

a_2) Esistono una funzione $\sigma(x') \in C^\infty(\bar{\Omega} - S) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$ e due costanti positive c_1 e c_2 tali che per ogni $x' \in \bar{\Omega}$ si abbia: $c_1 \rho(x') \leq \sigma(x') \leq c_2 \rho(x')$.

a_3) $a_{\alpha\beta} \in C^0(\bar{\Omega})$ per $\langle \alpha, q \rangle = \langle \beta, q \rangle = N$, $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ per $\langle \alpha + \beta, q \rangle \geq 2N$, $b \in C^0(\bar{\Omega})$, $0 \geq D_y b \in L^\infty(\Omega)$ e $D_y b \leq 0$ se $M_0 > 0$.

a_4) Per ogni α, β , per ogni $\gamma \leq \beta$, $\rho^{2N-(\alpha+\gamma, q)} D^{\beta-\gamma} a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$, $\rho^{2N-(M_0+1+\alpha, q)} D_y^\alpha b \in L^\infty(\Omega)$ per $|\alpha| = \alpha_n \leq M_0$, $a_{\alpha\beta} \in C^{|\beta|}(\bar{\Omega} - S)$ per $\langle \alpha, q \rangle = \langle \beta, q \rangle = N$.

a_5) Per la funzione $\sigma(x')$ di cui all'ipotesi a_2) esistono delle costanti c_α tali che per ogni α e per ogni $x' \in \Omega$ si abbia: $|D^\alpha \sigma(x')| \leq c_\alpha \sigma^{-|\alpha|+1}(x')$.

Vale il

TEOREMA I. Nelle ipotesi $a_1), \dots, a_4)$ esiste $\lambda_0 > 0$ tale che per $\lambda \geq \lambda_0$ il problema (3)-(5) ha per $s = N$ una e una sola soluzione; se in particolare

nell'operatore A è $M_0 = 0$, nell'ulteriore ipotesi a_3) esistono $\lambda_0 > 0$ e $s_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ tali che il problema (3)-(5) ha una e una sola soluzione per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ e per ogni $s \in [N - s_0, N + s_0]$.

2. Consideriamo ancora le seguenti ipotesi:

b_1) Esiste una funzione $\sigma(x') \in C^\infty(\bar{\Omega} - S) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$ tale che per ogni α esiste $c_\alpha > 0$: $|D^\alpha \sigma| \leq c_\alpha \sigma^{-|\alpha|+1}$ e $\sigma(x') = \rho(x')$ in un intorno di S ,

b_2) $a_{\alpha\beta} \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{|\beta|}(\bar{\Omega} - S)$ per $\langle \alpha, q \rangle = \langle \beta, q \rangle = N$, $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ per $\langle \alpha + \beta, q_0 \rangle < 2N$, $D_y^{\beta-\gamma} a_{\alpha\beta} \in L_{N-(\alpha+\gamma, q_0)}^\infty(\Omega)$ per $\langle \alpha, q_0 \rangle \leq N$, $\langle \beta, q_0 \rangle \leq N$, $\gamma \leq \beta$, $b \in C^0(\bar{\Omega})$, $D_y^\alpha b \in L_{N-(2M_0+1-\alpha, q_0)}^\infty(\Omega)$ per $|\alpha| = \alpha_n \leq M_0$, $D_y b \leq 0$, ed osserviamo che si possono definire spazi di Sobolev con peso σ anziché ρ per i quali valgono ancora tutte le proprietà richieste e che indicheremo ancora con gli stessi simboli $W_s^{2N}(\Omega)$ e $L_s^2(\Omega)$. Indicheremo poi con $W_s^{2N}(\Omega, \partial/\partial\nu)$ lo spazio delle funzioni $u \in W_s^{2N}(\Omega)$ e verificanti le (5). Vale il

TEOREMA II. Nelle ipotesi a_1), a_2) e b_2) l'operatore

$$-A : u \in W_s^{2N}(\Omega, \partial/\partial\nu) \subset L_{s-N}^2(\Omega) \rightarrow -Au \in L_{s-N}^2(\Omega)$$

è generatore infinitesimale di un semigruppato di classe C_0 per $s = N$; se in particolare è $M_0 = 0$, sostituendo l'ipotesi a_2) con la b_1) si ha che esiste $s_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ tale che la tesi è ancora valida per ogni $s \in [N - s_0, N + s_0]$.

Un teorema di questo tipo vale anche per un operatore fortemente quasi-ellittico in $\bar{\Omega} = \Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$.

I dettagli e le dimostrazioni dei teoremi qui presentati sono esposti in un lavoro che sarà pubblicato su « Ricerche di Matematica ».

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. A. ADAMS (1975) - *Sobolev Spaces*, « Pure and Appl. Math., Ser. of Monogr. », 65, New York.
- [2] S. AGMON (1965) - *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostr. Math. Studies, Princeton.
- [3] M. L. BENEVENTO - *Sul problema del tipo di Dirichlet per operatori ellittico-parabolici di ordine 2 s quasi ellittici nelle zone di degenerazione*. Sarà pubblicato su « Ricerche di Mat. ».
- [4] M. L. BENEVENTO, T. BRUNO e L. CASTELLANO (1976) - *Esistenza ed unicità di una soluzione generalizzata del problema del tipo di Dirichlet relativo ad una classe di operatori ellittico-parabolici del IV ordine degeneri in una o più direzioni*, « Ricerche di Math. », 25, 81-100.
- [5] A. CANFORA (1977) - *Teoremi di esistenza e unicità per un problema al contorno relativo ad una equazione ellittico-parabolica di ordine 2M*, « Ricerche di Mat. », 26.
- [6] E. GIUSTI (1967) - *Equazioni quasi-ellittiche e spazi $\mathcal{L}^{p,0}(\Omega, \delta)$* , « Ann. di Mat. », 75, 313-353.
- [7] J. L. LIONS e E. MAGENES (1968) - *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod Ed., Paris.

- [8] E. HILLE e R. PHILLIPS (1957) - *Functional Analysis and semi-groups*, « Amer. Math. Soc. », Providence.
- [9] C. MIRANDA (1962) - *Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche*, « Ann. di Mat. », 59, 189-212.
- [10] J. NECAS (1967) - *Les methodes directes en théorie des équations elliptiques*, Mason et Cie Ed., Paris, Academia Ed., Prague.
- [11] M. TROISI (1971) - *Problemi al contorno con condizioni omogenee per le equazioni quasi-ellittiche*, « Ann. di Mat. », 90, 331-412.
- [12] M. TROISI (1966) - *Problemi ellittici con dati singolari*, « Ann. di Mat. », 83, 363-407.
- [13] K. YOSIDA, (1968) - *Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin-New York.