Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gioconda Moscariello

Su una convergenza di successioni di integrali del Calcolo delle Variazioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.5, p. 368–375.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_5_368_0>

Calcolo delle variazioni. — *Su una convergenza di successioni di integrali del Calcolo delle Variazioni.* Nota di GIOCONDA MOSCARIELLO (*), presentata (**) dal Socio C. MIRANDA.

SUMMARY. — A new kind of convergence for integrals of the Calculus of Variations was considered in [6], where a compactness theorem was given.

Here, using some results of [4], we give a compactness result for a smaller class of functional possessing minima in Sobolev spaces, and deduce, by this convergence of integrals, the convergence of their minima and minimum points in suitable spaces.

INTRODUZIONE

In un recente lavoro [6] è stato considerato un tipo di convergenza per successioni di integrali della forma

$$\int_\Omega f(x, Du) \qquad (\Omega \text{ aperto di } R^n)$$

con $f = f(x, w)$ funzione reale definita in R^{2n} soddisfacente alle condizioni $(p > 1)$

$$a) \qquad |w| \le \sqrt[p]{f(x,w)} \le s(1 + |w|)$$

$$b) \qquad \left| \sqrt[p]{f(x,w)} - \sqrt[p]{f(x,w')} \right| \le s\, |w - w'| .$$

Tale convergenza è caratterizzata al modo seguente: per ogni Ω aperto limitato di R^n,

$$(1) \qquad u_h , u \in C^1(R^n)\; u_h \to u \quad \text{in } L^p(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega f(x, Du) \le \liminf_h \int_\Omega f_h(x, Du_h)$$

$$(2) \qquad \forall u \in C^1(R^n)\; \exists w_h \in C^1(R^n) : w_h - u \in C_0^1(\Omega)$$

e

$$w_h \to u \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad , \quad \int_\Omega f(x, Du) = \lim_h \int_\Omega f_h(x, Dw_h) .$$

(*) Lavoro eseguito con borsa di studio del CNR per laureandi per l'Anno Acc. 1975–76. Istituto Matematico « R. Caccioppoli », Via Mezzocannone 8, Napoli.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1976.

Per la convergenza (1), (2) viene dato in [6] un teorema di compattezza sequenziale e, limitatamente al caso di forme quadratiche ($p = 2$) del tipo:

$$f_h(x, w) = \sum_{ij} a_{ij,h}(x) w_i w_j ,$$

posto per $\varphi \in L^2(\Omega)$:

$$Q_h(\Omega, v) = \int_\Omega f_h(x, Dv)$$

$$M_h(\Omega, \varphi) = \min_{v \in H_0^{1,2}(\Omega)} \left\{ Q_h(\Omega, v) + \int_\Omega \varphi v \right\} = Q_h(\Omega, u_h(\varphi)) + \int_\Omega \varphi u_h(\varphi) ,$$

un risultato del tipo

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} u_h(\varphi) \to u(\varphi) & \text{in } L^2(\Omega) \\ M_h(\Omega, \varphi) \to M(\Omega, \varphi) , \end{cases}$$

ove $u(\varphi)$ e $M(\Omega, \varphi)$ sono definiti da

$$M(\Omega, \varphi) = \min_{v \in H_0^{1,2}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega f(x, Dv) + \int_\Omega \varphi v \right\} = \int_\Omega f(x, Du(\varphi)) + \int_\Omega \varphi u(\varphi)$$

e inoltre

$$f(x, w) = \sum_{ij} a_{ij}(x) w_i w_j .$$

In questa Nota, facendo uso di alcuni risultati contenuti in [4], estendiamo un teorema di questo genere ad una classe particolare di funzionali del tipo *a*), *b*) che, nel caso $p = 2$, contiene le forme quadratiche.

Successivamente esaminiamo una convergenza più fine per i funzionali della classe considerata, da cui segue la convergenza forte in $H^{1,p}$ delle soluzioni di problemi di minimo corrispondenti, generalizzando un teorema, relativo a forme quadratiche uniformemente ellittiche, contenuto in [3].

1. DEFINIZIONI E RICHIAMI

Riportiamo alcune definizioni e proposizioni per la cui dimostrazione cfr [4].

Se (X, τ) è uno spazio sequenziale e (f_h) una successione di funzioni da X in $\bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$, definiamo le funzioni di $x \in X$ (cfr. [4])

$$\Gamma_{\text{seq}}^{-}(\tau) \liminf_h f_h(x) = \inf \{ \liminf_h f_h(x_h) : x_h \xrightarrow{\tau} x \}$$

$$\Gamma_{\text{seq}}^{-}(\tau) \limsup_h f_h(x) = \inf \{ \limsup_h f_h(x_h) : x_h \xrightarrow{\tau} x \} .$$

DEFINIZIONE 1.1. Se σ e τ sono convergenze su X, diremo che f è il $\Gamma^-(\sigma,\tau)$ limite sequenziale della successione (f_h) in X $(f = \Gamma^-_{seq}(\sigma,\tau)\lim_h f_h)$ se e solo se $\forall x \in X$

$$f(x) = \Gamma^-_{seq}(\sigma)\liminf_h f_h(x) = \Gamma^-_{seq}(\tau)\limsup_h f_h(x).$$

Quando $\sigma = \tau$ porremo

$$\Gamma^-_{seq}(\sigma,\sigma)\lim_h f_h = \Gamma^-_{seq}(\sigma)\lim_h f_h.$$

PROPOSIZIONE 1.2. *Se* $g \in C^0_{seq}(X,\tau)$ [1] *e* $f = \Gamma^-_{seq}(\tau)\lim_h f_h$ *allora*

$$f + g = \Gamma^-_{seq}(\tau)\lim_h (f_h + g).$$

PROPOSIZIONE 1.3. *Siano* $f_h : X \to [0,\infty]$, τ *una convergenza separata* [2] *e* σ *una convergenza più fine di* τ *tali che*

$$(f_h(x_h))_h \textit{ convergente} \Rightarrow (x_h)_h \textit{ sequenzialmente } \sigma\textit{-compatta.}$$

Se $f = \Gamma^-_{seq}(\sigma)\lim_h f_h$ *allora anche* $f = \Gamma^-_{seq}(\tau)\lim_h f_h$.

TEOREMA 1.4. *Siano* σ *e* τ *convergenze su* X, $f_h : X \to \bar{R}$ *e* $f = \Gamma^-_{seq}(\sigma,\tau)\lim_h f_h$. *Se esiste* $K \subseteq X$ *sequenzialmente* σ*-compatto tale che*

$$\inf_K f_h = \inf_X f_h \qquad \forall h \in N$$

allora

$$\min_K f = \min_X f = \lim_h \inf_X f_h.$$

Se inoltre

$$x_h \xrightarrow{\sigma} x \textit{ e } f_h(x_h) \to \inf_X f \qquad \textit{allora } f(x) = \min_X f.$$

In generale non si ottiene alcuna informazione sulla τ–convergenza dei punti di minimo x_h di f_h; in certe ipotesi è possibile, però ottenere tale condizione come mostra ad esempio il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia* X *di Banach,* $f_h : X \to \bar{R}$ *tali che*

$$f_h(x) + f_h(y) \geq 2 f_h\left(\frac{x+y}{2}\right) + \gamma(\|x - y\|_X) \qquad \forall h \in N, \forall x, y \in X$$

ove $\gamma : R^+ \to R^+$ *è crescente, continua,* $\gamma(0) = 0$.

(1) Con $C^0_{seq}(X,\tau)$ denotiamo l'insieme delle funzioni $f \in \bar{R}^X$ τ–sequenzialmente continue su X.

(2) Una convergenza τ è separata quando ogni successione convergente secondo τ ha un unico limite.

Se $f = \Gamma^{-}_{\text{seq}}(w, s) \lim_h f_h$ (3) *e* x_h *sono tali che*

$$f_h(x_h) = \min_X f_h = \min_K f_h \qquad (\text{K } w\text{-compatto})$$

allora $x_h \xrightarrow{s} x$ *e* $f(x) = \min_X f = \min_K f$.

Per ogni aperto Ω limitato di R^n denotiamo con $C_0^1(\Omega)$ lo spazio delle funzioni continue in Ω con le derivate prime e a supporto compatto contenuto in Ω.

Posto

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

sia $H_0^{1,p}(\Omega)$ $(p \geq 1)$ la chiusura di $C_0^1(\Omega)$ rispetto alla norma

$$\| u \| = \left(\int_\Omega |Du|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

2. SUCCESSIONI DI INTEGRALI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

In questo paragrafo, utilizzando i risultati precedenti, consideriamo i $\Gamma^{-}(\sigma, \tau)$ limiti sequenziali di certe successioni di integrali del Calcolo delle Variazioni, per opportune scelte delle convergenze σ e τ, ottenendo alcuni teoremi di chiusura e compattezza di classi di funzionali e di convergenza debole o forte in Spazi di Sobolev dei loro vettori minimanti.

Fissati $n, s \geq 1$ (n intero), $p > 1$, denotiamo con $\mathscr{C}^p_{n,s}$ l'insieme delle funzioni reali misurabili $f = f(x, w)$ definite per $x, w \in R^n$ e soddisfacenti alle condizioni

$$(2.1) \qquad \begin{cases} |w| \leq \sqrt[p]{f(x, w)} \leq s(1 + |w|) \\ \left|\sqrt[p]{f(x, w)} - \sqrt[p]{f(x, w')}\right| \leq s\,|w - w'| \end{cases}$$

$$(2.2) \qquad f(x, w) + f(x, w') \geq 2f\left(x, \frac{w + w'}{2}\right) + |w - w'|^p$$

per ogni $w, w' \in R^n$ e per quasi ogni $x \in R^n$.

d Sia poi, per ogni aperto limitato Ω di R^n, $\mathscr{D}^p_{n,s}(\Omega)$ la classe dei funzionali efiniti in $H_0^{1,p}(\Omega)$ del tipo:

$$(2.3) \qquad F(u) = \int_\Omega f(x, Du) \, dx$$

con $f \in \mathscr{C}^p_{n,s}$.

(3) Con w indichiamo la convergenza debole in X e con s quella forte.

Cominciamo col dimostrare un Teorema di compattezza sequenziale della classe $\mathcal{D}^p_{n,s}(\Omega)$ rispetto alla $\Gamma^-_{\mathrm{seq}}(w)$ convergenza, w essendo la topologia debole di $H_0^{1,p}(\Omega)$, facendo uso di un teorema di compattezza su $C^1(R^n)$ rispetto alla $\Gamma^-(L^p(\Omega))$ convergenza per successioni di funzionali del tipo (2.1), (2.3), provato in [6].

Precisamente sussiste il seguente

TEOREMA 2.1. *Se* $(f_h) \subset \mathcal{C}^p_{n,s}$, *allora esiste* (h_r) *strett. crescente ed* $f \in \mathcal{C}^p_{n,s}$ *tale che, per ogni aperto limitato* Ω *di* R^n,

$$\int_\Omega f(x, Du) = \Gamma^-_{\mathrm{seq}}(w - H_0^{1,p}(\Omega)) \lim_r f_{h_r}(x, Du) \tag{2.4}$$

per ogni $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$.

Inoltre, per ogni $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$ $(1/p + 1/p' = 1)$, *denotati con*

$$u_h(\varphi) \quad , \quad u(\varphi) \tag{2.5}$$

i punti di minimo dei funzionali:

$$\begin{aligned} v \in H_0^{1,p}(\Omega) &\to \int_\Omega [f_h(x, Dv) + \varphi v] \\ v \in H_0^{1,p}(\Omega) &\to \int_\Omega [f(x, Dv) + \varphi v], \end{aligned} \tag{2.6}$$

si ha:

$$u_{h_r}(\varphi) \to u(\varphi) \qquad in \quad w - H_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.7}$$

Dimostrazione. Fissato Ω e posto, per ogni h ed u

$$F_h(u) = \int_\Omega f_h(x, Du), \tag{2.8}$$

grazie al Teorema 1 e alla Proposizione IV di [6] esiste una successione strettamente crescente di interi (h_r) ed una funzione $f = f(x, w)$ verificante (2.1) tale che

$$G(u) = \int_\Omega f(x, Du) = \Gamma^-(L^p(\Omega)) \lim_r F_{h_r}(u) \qquad \forall u \in C^1(R^n). \tag{2.9}$$

Inoltre, posto $\forall u \in H_0^{1,p}(\Omega)$:

$$G_r(u) = \begin{cases} F_{h_r}(u) & u \in C^1(R^n) \\ +\infty & u \in H_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

per la Proposizione 1.5 e i Teoremi 3.7, 3.8 di [2], esiste un funzionale $\tilde{\tilde{G}} : H_0^{1,p}(\Omega) \to \bar{R}$, verificante la condizione

$$|\tilde{\tilde{G}}^{1/p}(u) - \tilde{\tilde{G}}^{1/p}(v)| \leq s \| u - v \|_{H^{1,p}(\Omega)}$$

tale che:

$$\tilde{\tilde{G}}(u) = \Gamma^{-}(L^p(\Omega)) \lim_r G_r(u) \qquad \forall u \in H_0^{1,p}(\Omega).$$

Se dimostriamo che $\tilde{\tilde{G}}(u) = G(u)\ \forall u \in C^1$, allora per motivi di continuità, avremo anche provato che

$$\int_\Omega f(x, Du) = \Gamma^{-}(L^p(\Omega)) \lim_r F_{h_r}(u) \qquad \forall u \in H_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.10}$$

Per provare che, assegnata $u \in C^1$, si ha

$$\tilde{\tilde{G}}(u) \leq G(u),$$

sia $u_r \in C^1$ tale che $u_r \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $G(u) = \lim_r F_{h_r}(u_r)$; allora:

$$\tilde{\tilde{G}}(u) \leq \liminf_r G_r(u_r) = \lim_r F_{h_r}(u_r) = G(u).$$

Viceversa sia $u \in C^1$ tale che $\tilde{\tilde{G}}(u) < \infty$. Se $u_h \in H_0^{1,p}(\Omega)$ è tale che $u_r \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $\tilde{\tilde{G}}(u) = \lim_r G_r(u_r)$, si ha definitivamente $G_r(u_r) < \infty$, da cui $u_r \in C^1$ e $G(u) \leq \liminf_r F_{h_r}(u_r) = \tilde{\tilde{G}}(u)$.

Grazie alla Proposizione 1.3 e alla Proposizione 1.4 di [1] si ha allora, oltre alla (2.10), che:

$$\begin{aligned} G(u) = \int_\Omega f(x, Du) &= \Gamma_{\text{seq}}^{--}(w_\Omega) \lim_r F_{h_r}(u) = \\ &= \Gamma^{-}(w_\Omega) \lim_r F_{h_r}(u) \qquad \forall u \in H_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.11}$$

(Ove w_Ω indica la topologia debole di $H_0^{1,p}(\Omega)$).

Per provare che f verifica la (2.2) osserviamo che, invocando nuovamente il Teorema 1 di [6], si può dimostrare la relazione

$$\int_{\Omega'} |Du - Dv|^p + 2 \int_{\Omega'} f\left(x, \frac{Du + Dv}{2}\right) \leq \int_{\Omega'} f(x, Du) + \int_{\Omega'} f(x, Dv) \tag{2.12}$$

per ogni $u, v \in C^1$ e per ogni Ω' aperto limitato di R^n.

Indicando con (q_h) la successione dei polinomi reali in n variabili reali a coefficienti razionali, evidentemente esiste, grazie alla (2.12), un sottoinsieme

M di R^n di misura nulla secondo Lebesgue tale che per ogni h, k e $\forall x \in R^n - M$:

$$(2.13) \qquad |Dq_h(x) - Dq_k(x)|^p + 2f\left(x, \frac{Dq_h(x) + Dq_k(x)}{2}\right) \leq$$
$$\leq f(x, Dq_h(x)) + f(x, Dq_k(x)).$$

Poiché, per x fissato in $R^n - M$, la successione $(Dp_h(x))$ è densa in R^n, allora, utilizzando la (2.1) e la (2.13) si ottiene per f la (2.2).

Si osservi ora, che poichè (per la Proposizione 1.11 di [4]) $\forall \varphi \in L^{p'}(\Omega)$

$$G(v) + \int_\Omega \varphi v = \Gamma^-_{\text{seq}}(w) \lim_r \left[F_{h_r}(v) + \int_\Omega \varphi v\right]$$

e i funzionali (2.6) hanno i loro unici punti di minimo $u_h(\varphi)$, $u(\varphi)$ in un insieme del tipo $\|v\|_{H_0^{1,p}(\Omega)} \leq c(\varphi)$, dal Teorema 1.4 si deduce la (2.7).

In quest'ultima parte del lavoro consideriamo un limite del tipo $\Gamma^-_{\text{seq}}(w, s)$ (4) per i funzionali della classe precedente, per cui non sussiste un Teorema di compattezza, come si mostra con esempi già nel caso quadratico.

Il risultato che segue mette in luce che però per questi funzionali dalla $\Gamma^-_{\text{seq}}(w, s)$ convergenza segue la convergenza forte delle soluzioni di problemi di minimo, estendendo così un risultato analogo di [3] relativo al caso di funzionali quadratici uniformemente ellittici.

COROLLARIO 2.2. *Se* $(f_h) \subset \mathscr{C}^p_{n,s}$, Ω *è un aperto limitato di* R^n, $(p > 1)$ *e* $F_h(u) = \int_\Omega f_h(x, Du)$ *verificano*:

$$F(u) = \Gamma^-_{\text{seq}}(w, s) \lim_h F_h(u) \qquad \forall u \in H_0^{1,p}(\Omega)$$

allora esiste $f \in \mathscr{C}^p_{n,s}$ *tale che*:

$$F(u) = \int_\Omega f(x, Du).$$

Inoltre, se $u_h(\varphi)$, $u(\varphi)$ *sono definiti da* (2.5), (2.6), *allora*:

$$u_h(\varphi) \to u(\varphi) \qquad in \quad s - H_0^{1,p}(\Omega).$$

Dimostrazione. Basta utilizzare il precedente Teorema e la Proposizione 1.5, osservando che il funzionale

$$v \in H_0^{1,p}(\Omega) \to G(v) + \int_\Omega \varphi v$$

ha un unico punto di minimo.

(4) Con w (risp. s) indichiamo la topologia debole (risp. forte) di $H_0^{1,p}(\Omega)$. Tale convergenza è stata introdotta in [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AMBROSETTI e C. SBORDONE (1976) – *Γ-convergenza e G-convergenza per problemi non lineari di tipo ellittico.* « Boll. U.M.I. ». (5) *13-A*, 352–362.

[2] E. DE GIORGI e T. FRANZONI (1975) – *Su un tipo di convergenza variazionale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 842–850. Roma.

[3] P. MARCELLINI (1973) – *Su una convergenza di funzioni convesse*, « Boll. U.M.I. », *8*, 137–158.

[4] G. MOSCARIELLO (1976) – *Γ-convergenza negli spazi sequenziali.* « Rend. Acc. Sc. fis. mat., », *43*, Napoli.

[5] U. MOSCO (1969) – *Convergence of convex Sets and of Solutions of variational Inequalities*, « Advances in Math. », *3*, 510–585.

[6] C. SBORDONE (1975) – *Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale*, « Ann. Scuola Norm. Pisa », IV, *2*, 617–638.