Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sorin Gogonea

Sur le problème de la détermination des fonctions analytiques par certaines conditions de raccordement et conditions aux limites mixtes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.5, p. 337–343.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_5_337_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Analisi matematica. — *Sur le problème de la détermination des fonctions analytiques par certaines conditions de raccordement et conditions aux limites mixtes.* Nota di SORIN GOGONEA, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

RIASSUNTO. — Siano $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$ i domini $y > 0$ e $y < 0$ del piano complesso $z = x + iy$ e L_s $(s = 1, 2, \cdots, p)$, T_m $(m = 1, 2, \cdots, q)$, Γ_l $(l = 1, 2, \cdots, r)$, $p + q + r$ segmenti sull'asse reale senza punti comuni. Si determinano due funzioni analitiche $f_j(z) = \varphi_j + i\psi_j$ definite in $\mathscr{D}_j$ $(j = 1, 2)$ le quali hanno singolarità isolate, con le seguenti condizioni: i valori di φ_j et ψ_j verificano le condizioni (5)–(8) sugli orli di tagli disposti lungo L_s, T_m e Γ_l e le condizioni di raccordo (3)–(4) sulla parte restante dell'asse reale.

1. Soient dans le plan complexe $z = x + iy$ les domaines $\mathscr{D}_1 : y > 0$ et $\mathscr{D}_2 : y < 0$ et considérons sur l'axe réel L les segments disjoints $L_s : \overline{A_s B_s}$ $(s = 1, 2, \cdots, p)$, $T_m : \overline{C_m D_m}$ $(m = 1, 2, \cdots, q)$ et $\Gamma_l : \overline{R_l S_l}$ $(l = 1, 2, \cdots, r)$ dont la position relative est quelconque. Soit E l'ensemble des extrémités des segments L_s, leurs abscisses considérées dans un ordre arbitraire étant notées par e_n $(n = 1, 2, \cdots, 2p)$. D'une façon analogue soit E′ l'ensemble des extrémités des segments T_m dont les abscisses considérées dans un ordre arbitraire étant notées par $e'_{n'}$, $(n' = 1, 2, \cdots, 2q)$.

Considérons ensuite sur chaque segment Γ_l un point Λ_l ayant l'abscisse λ_l, $l = 1, 2, \cdots, r$, et notons $\Gamma'_l = \overline{R_l \Lambda_l}$ et $\Gamma''_l = \overline{\Lambda_l S_l}$. L'ensemble des extremités de Γ_l et des points Λ_l sera noté par E″ et les abscisses de ces points considérées dans un ordre arbitraire par $e''_{n''}$ $(n'' = 1, 2, \cdots, 3l)$. Posons $\mathscr{E} = E \cup E' \cup E''$.

Désignons par L_s^+ et L_s^- le côté supérieur (vers $y > 0$) respectivement inférieur de la coupure pratiquée sur L_s. D'une façon analogue soient T_m^+ et T_m^- respectivement Γ_l^+ et Γ_l^- les deux côtés de la coupure pratiquée sur T_m respectivement Γ_l et posons

$$L^+ = \bigcup_{s=1}^{p} L_s^+ \quad ; \quad L^- = \bigcup_{s=1}^{p} L_s^- \quad ; \quad T^+ = \bigcup_{m=1}^{q} T_m^+ \quad ; \quad T^- = \bigcup_{m=1}^{q} T_m^-$$

$$(\Gamma')^+ = \bigcup_{l=1}^{r} (\Gamma'_l)^+ \; ; \; (\Gamma')^- = \bigcup_{l=1}^{r} (\Gamma'_l)^- \; ; \; (\Gamma'')^+ = \bigcup_{l=1}^{r} (\Gamma''_l)^+ \; ; \; (\Gamma'')^- = \bigcup_{l=1}^{r} (\Gamma''_l)^-$$

$$L^* = \left(\bigcup_{s=1}^{p} L_s\right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{q} T_m\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{r} \Gamma_l\right) \quad ; \quad L_0 = L \setminus L^* .$$

Soient ensuite $F_1(z)$ et $F_2(z)$ deux fonctions uniformes, définies dans tout le plan à l'exception de l'ensemble $\mathscr{S}_1$ respectivement $\mathscr{S}_2$ de leurs singularités isolées. On suppose que $\mathscr{S}_j \subset \mathscr{D}_j$ de la sorte que $F_j(z)$ est holomorphe en $\mathscr{D}_{\mathfrak{T}}$, $\mathfrak{T} \neq j$.

(*) Nella seduta del 13 novembre 1976.

Dans ce qui suit nous nous proposons de résoudre le problème suivant: déterminer les fonctions analytiques $f_j(z)$ définies en $\mathcal{D}_j \setminus \mathcal{S}_j$ $(j = 1, 2)$ continûment prolongéables sur $L \setminus \mathcal{E}$ telles que

a) La différence

$$\mathcal{F}_j(z) = f_j(z) - F_j(z) \tag{1}$$

est holomorphe en $\mathcal{D}_j, j = 1, 2$.

b) Au voisinage des points de $\mathcal{E}$ on ait

$$|f_j(z)| < \frac{C^{te}}{|z - \tilde{e}_\delta|^\alpha}, \qquad \alpha \in (0, 1) \tag{2}$$

où $\tilde{e}_\delta$ est l'un des points $e_n, e'_{n'}, e''_{n''}$.

c) Les valeurs limites de $f_j(z)$ verifient les conditions

$$\mathrm{Re}\{k_2 f_1(\zeta) - k_1 f_2(\zeta)\} = 0, \qquad \zeta \in L_0 \tag{3}$$

$$\mathrm{Im}\{f_1(\zeta) - f_2(\zeta)\} = 0, \qquad \zeta \in L_0 \tag{4}$$

$$\mathrm{Re}\{f_1(\zeta)\} = m_1(\zeta), \qquad \zeta \in L^+ \cup \tilde{L}^+ \tag{5}$$

$$\mathrm{Re}\{f_2(\zeta)\} = m_2(\zeta), \qquad \zeta \in L^- \cup \tilde{L}^- \tag{6}$$

$$\mathrm{Im}\{f_1(\zeta)\} = n_1(\zeta), \qquad \zeta \in T^+ \cup \tilde{T}^+ \tag{7}$$

$$\mathrm{Im}\{f_2(\zeta)\} = n_2(\zeta), \qquad \zeta \in T^- \cup \tilde{T}^- . \tag{8}$$

La signification de $\tilde{L}^\pm$ et $\tilde{T}^\pm$ est la suivante. Soit $\tilde{L} = \bigcup_{l=1}^{r} \tilde{L}_l$ où $\tilde{L}_l$ est l'un des segments Γ'_l ou Γ''_l, $(l = 1, 2, \cdots, r)$. Donc $\tilde{L}$ est une réunion des segments dont chacun et soit la partie gauche soit la partie droite de Γ_l. Le complémentaire de $\tilde{L}$ par rapport a $\bigcup_{l=1}^{r} \Gamma_l$ est $\tilde{T}$. On a donc pour chaque l, $\Gamma_l = \tilde{L}_l \cup \tilde{T}_l$. Les parties des coupures pratiquées sur Γ_l et qui correspondent aux segments $\tilde{L}_l$ et $\tilde{T}_l$ seront notées par $\tilde{L}_l^\pm$, $\tilde{T}_l^\pm$. Posons enfin

$$\tilde{L}^+ = \bigcup_{l=1}^{r} \tilde{L}_l^+ \quad ; \quad \tilde{L}^- = \bigcup_{l=1}^{r} \tilde{L}_l^- \quad ; \quad \tilde{T}^+ = \bigcup_{l=1}^{r} \tilde{T}_l^+ \quad ; \quad \tilde{T}^- = \bigcup_{l=1}^{r} T_l^- .$$

Les fonctions $m_1(\zeta)$ et $m_2(\zeta)$ respectivement $n_1(\zeta)$ et $n_2(\zeta)$ sont des fonctions höldériennes données sur $\left(\bigcup_{s=1}^{p} L_s\right) \cup \tilde{L}$ respectivement sur $\left(\bigcup_{m=1}^{q} T_m\right) \cup \tilde{T}$.

Il s'ensuit donc que les parties réeles de $f_j(z)$ sot données sur les côtés respectifs des coupures pratiquées sur L_s et sur une partie du coupure pratiquée sur chaque segment Γ_l. D'une façon analogue les parties imaginaires de $f_j(z)$ sont données sur les côtés respectifs des coupures pratiquées sut T_m et sur l'autre partie du chaque segment Γ_l. Sur L_0 les parties réelles et imaginaires de $f_j(z)$ vérifient les conditions de raccordement (3) et (4). k_1 et k_2 sont des constantes réelles données de la sorte que $k_1 + k_2 \neq 0$.

Dans l'absence des segments Γ_l le problème a été résolu en [1].

2. Introduisons les fonctions

$$G_1(z) = \overline{F_2(\bar{z})} \quad ; \quad g_1(z) = \overline{f_2(\bar{z})} \tag{9}$$

$G_1(z)$ est définie dans tout le plan à l'exception de l'ensemble $\mathscr{S}_1^*$ de ses singularités, où $\mathscr{S}_1^* \subset \mathscr{D}_1$ est l'ensemble des points symétriques à $\mathscr{S}_2$ par rapport à l'axe réel, tandis que $g_1(z)$ est définie en $\mathscr{D}_1 \diagdown \mathscr{S}_1^*$ et telle que $g_1(z) - G_1(z)$ est holomorphe en $\mathscr{D}_1$. On a pour chaque $\zeta \in L \diagdown \mathscr{E}$

$$g_1(\zeta) = \overline{f_2(\zeta)} \tag{10}$$

où

$$\operatorname{Re}\{g_1(\zeta)\} = \operatorname{Re}\{f_2(\zeta)\} \quad ; \quad \operatorname{Im}\{g_1(\zeta)\} = -\operatorname{Im}\{f_2(\zeta)\}\,. \tag{10'}$$

Il en résulte alors de (3), (4) et (10')

$$\operatorname{Re}\{k_2 f_1(\zeta) - k_1 g_1(\zeta)\} = 0 \quad ; \quad \operatorname{Im}\{f_1(\zeta) + g_1(\zeta)\} = 0\,. \tag{11}$$

Introduissons alors, [1], les fonctions $H(z)$ et $K(z)$ définies en $\mathscr{D}_1 \diagdown (\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_1^*)$ par les relations

$$H(z) = k_2 f_1(z) - k_1 g_1(z) \quad ; \quad K(z) = f_1(z) + g_1(z)\,. \tag{12}$$

3. Compte tenu de (1) et (9) il résulte que si l'on pose

$$H_0(z) = k_2 F_1(z) - k_1 G_1(z) \tag{13}$$

la différence $H(z) - H_0(z)$ est holomorphe en $\mathscr{D}_1$. Ensuite de (3)-(8) et (11) on déduit que

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{H(\zeta)\} = \begin{cases} 0 \,, & \zeta \in L_0 \\ k_2 m_1(\zeta) - k_1 m_2(\zeta)\,, & \zeta \in \left(\bigcup_{s=1}^{p} L_s\right) \cup \tilde{L} \end{cases} \\ &\operatorname{Im}\{H(\zeta)\} = k_2 n_1(\zeta) + k_1 n_2(\zeta) \quad , \quad \zeta \in \left(\bigcup_{m=1}^{q} T_m\right) \cup \tilde{T}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

En conséquence $H(z)$ est la solution d'un problème mixte de Volterra à singularités données pour le demi-plan supérieur, [2]. On remarque que les points de $\mathscr{E}$ qui séparent les segments sur lesquels sont données alternavement la partie réelle et celle imaginaire de $H(z)$ sont les extrémités de T_m, l'une des extrémités de Γ_l, et Λ_l donc $2(q+l)$ points. Soit alors

$$(15) \qquad Z(z) = \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{\rho}(z-e'_j)\prod_{j=1}^{\mu}(z-e''_j)}{\prod_{j=\rho+1}^{2q}(z-e'_j)\prod_{j=\mu+1}^{2l}(z-e''_j)}}$$

où le radical est conséré holomorphe dans le plan muni de coupures sur T_m et $\tilde{T}_l$ et tel que $Z(z)$ est réelle et positive pour $z = x > \{\max e'_1, e'_2, \cdots, e'_{2q}, e''_1, e''_2, \cdots, e''_{3l}\}$. Il s'ensuit que $iZ(z)$ est la solution du problème homogène sans singularités et qui que est bornée au voisinage des points $e'_1, e'_2, \cdots, e'_\rho, e''_1, e''_2, \cdots, e''_\mu$ donnés à l'avance.

Il s'ensuit qu'au voisinage du point à l'infini $Z(z)$ est de la forme

$$(16) \qquad Z(z) = z^{-\varkappa}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

où

$$(17) \qquad \varkappa = -\rho - \mu + q + l.$$

Soit ensuite $N(z)$ la somme des parties principales de la fonction $-iH_0(z)/Z(z)$ relativement à toutes ses singularités. Alors on a [2]

$$(18) \qquad H(z) = iZ(z)\left\{N(z) + \overline{N(\bar{z})} + P_\varkappa(z) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_{L^+\cup\tilde{L}^+} \frac{k_2 m_1(\zeta) - k_1 m_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{z-\zeta} + \frac{i}{\pi}\int_{T^+\cup\tilde{T}^+} \frac{k_2 n_1(\zeta) + k_1 n_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{z-\zeta}\right\},$$

où $P_\varkappa(z)$ est un polynome arbitraire à coefficient réels de degré $\varkappa$ si $\varkappa \geq 0$ et qui se réduit à une constante réelle C_0 si $\varkappa < 0$.

Si $\varkappa \geq 0$ la fonction (18) satisfait à toutes les conditions imposées. Par contre si $\varkappa < 0$, $H(z)$ possède à l'infini un pôle supplémentaire d'ordre $-\varkappa$. En effet si l'on pose

$$(19) \qquad -i\frac{H_0(z)}{Z(z)} = N(z) + \tilde{N}(z),$$

$\tilde{N}(z)$ étant donc holomorphe on obtient de (9), (13), (18) et (19)

$$H(z) - H_0(z) = k_1 F_2(z) - k_2\overline{F_1(\bar{z})} + iZ(z)\left\{-\tilde{N}(z) - \overline{\tilde{N}(\bar{z})} + C_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_{L^+\cup\tilde{L}^+} \frac{k_2 m_1(\zeta) - k_1 m_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{z-\zeta} + \frac{i}{\pi}\int_{T^+\cup\tilde{T}^+} \frac{k_2 n_1(\zeta) + k_1 n_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{z-\zeta}\right\}.$$

Compte tenu de (16) où $\varkappa < 0$, ainsi que du fait que $F_2(z)$ et $\overline{F_1(\bar{z})}$ sont holomorphes en $\mathscr{D}_1$ il s'ensuit que $H(z) - H_0(z)$ possède à l'infini un pôle d'ordre $-\varkappa$. Afin qu'il disparaisse il faut et il suffit que la parenthèse qui multiplie $Z(z)$ ait à l'infini un zéro de multiplicité $-\varkappa$. Supposons qu'au voisinage de $z = \infty$ on a le developement

$$N(z) + \overline{N(\bar{z})} + \frac{i}{Z(z)} \{k_2 [F_1(z) - \overline{F_1(\bar{z})}] + k_1 [F_2(z) - \overline{F_2(\bar{z})}]\} + \tag{20}$$

$$+ C_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j z^{-j} .$$

Alors il est facile de vérifier que la solution (18) possède les singularités imposées si et seulement si

$$\nu_0 = 0 \tag{21}$$

$$\nu_s + \frac{1}{\pi} \int\limits_{L^+ \cup \tilde{L}^+} \frac{k_2 m_1(\zeta) - k_1 m_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)} \zeta^{s-1} d\zeta + \tag{21'}$$

$$\frac{i}{\pi} \int\limits_{T^+ \cup \tilde{T}^+} \frac{k_2 n_1(\zeta) + k_1 n_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)} \zeta^{s-1} d\zeta = 0 \qquad s = 1, 2, \cdots, -\varkappa - 1$$

et dans ce cas elle est unique. La condition $\nu_0 = 0$ peut être remplie en prenant $C_0 = 0$.

4. D'une façon analogue on obtient pour $K(z)$ le suivant problème de Volterra à singularités données:

La difference $K(z) - K_0(z)$, où

$$K_0(z) = F_1(z) + G_1(z) \tag{22}$$

est holomorphe de $\mathscr{D}_1$ et

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{K(\zeta)\} = m_1(\zeta) + m_2(\zeta) , && \zeta \in \left(\bigcup_{s=1}^{p} L_s\right) \cup \tilde{L} \\ &\operatorname{Im}\{K(\zeta)\} = \begin{cases} 0 , & \zeta \in L_0 \\ n_1(\zeta) - n_2(\zeta) , & \zeta \in \left(\bigcup_{m=1}^{q} T_m\right) \cup \tilde{T} . \end{cases} \end{aligned} \tag{23}$$

Cette fois-ci les points de $\mathscr{E}$ qui séparent les segments sur lesquels sont données la partie réele et celle imaginaire de $K(z)$ sont les extrémités de L_s, l'autre extrémité de Γ_l et Λ_l donc $2(p + l)$ points.

Soit $X(z)$ la solution du problème homogène sans singularités qui est bornée au voisinage des points $e_1, e_2, \cdots, e_\beta, e''_{i_1}, e''_{i_2}, \cdots, e''_{i_t}$ données à l'avance. Parmis $e''_{i_1}, e''_{i_2}, \cdots, e''_{i_t}$ se trouvent $e''_1, e''_2, \cdots, e''_\mu$ qui correspondent aux points Λ_l et qui figurent en (15). On a

$$\text{(23)} \qquad X(z) = \sqrt{\frac{\prod\limits_{j=1}^{\beta} (z - e_j) \prod\limits_{j=1}^{t} (z - e''_{i_j})}{\prod\limits_{i=\beta+1}^{2p} (z - e_j) \prod\limits_{j=t+1}^{2l} (z - e''_{i_j})}}$$

le radical étant holomorphe dans le plan muni des coupures sur L_s et $\tilde{L}_l$ et tel que $X(z)$ est réelle et positive pour $z = x > \max\{e_1, e_2, \cdots, e_{2p}, e''_1, e''_2, \cdots, e''_{3l}\}$.

Il s'ensuit qu'au voisinage du point à l'infini $X(z)$ est de la forme

$$\text{(24)} \qquad X(z) = z^{-\varkappa'} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

où

$$\text{(25)} \qquad \varkappa' = -\beta - \mu + p + l .$$

Alors si $M(z)$ représente la somme des parties principales de la fonction $K_0(z)/X(z)$ relativement à toutes ses singularités, $K(z)$ est donnée par, [2],

$$\text{(26)} \qquad K(z) = X(z) \Big\{ M(z) + \overline{M(\bar{z})} + Q_{\varkappa'}(z) +$$

$$+ \frac{i}{\pi} \int\limits_{L^+ \cup \tilde{L}^+} \frac{m_1(\zeta) + m_2(\zeta)}{X^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z - \zeta} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{T^+ \cup \tilde{T}^+} \frac{n_2(\zeta) - n_1(\zeta)}{X^+(\zeta)} \frac{d\zeta}{z - \zeta} \Big\},$$

où $Q_{\varkappa'}(z)$ est polynôme arbitraire à coefficients réels de dégré $\varkappa'$ si $\varkappa' \geq 0$ et qui se reduit à une constante réelle C'_0 si $\varkappa' < 0$.

Comme dans le cas précedent il résulte que si $\varkappa' \geq 0$, la solution (26) satisfait à toutes les conditions mais si $\varkappa' < 0$ elle possède à l'infini un pôle supplémentaire d'ordre $-\varkappa'$. Afin qu'il disparaisse il faut et il suffit que

$$\text{(27)} \qquad \mu_0 = 0$$

$$\text{(27')} \qquad \mu_s + \frac{i}{\pi} \int\limits_{L^+ \cup \tilde{L}^+} \frac{m_1(\zeta) + m_2(\zeta)}{X^+(\zeta)} \zeta^{s-1} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int\limits_{T^+ \cup \tilde{T}^+} \frac{n_2(\zeta) - n_1(\zeta)}{X^+(\zeta)} \zeta^{s-1} d\zeta = 0$$

$$s = 1, 2, \cdots, -\varkappa' - 1,$$

où les μ_s résultent du developpement au voisinage du $z = \infty$

$$\text{(28)} \qquad M(z) + \overline{M(\bar{z})} + C'_0 -$$

$$- \frac{1}{X(z)} [F_1(z) + F_2(z) + \overline{F_1(\bar{z})} + \overline{F_2(\bar{z})}] = \sum_{j=0}^{\mu} \mu_j z^{-j} .$$

Ces conditions, dont la première peut être remplie en prenant $C'_0 = 0$, assurent l'unicité de la solution.

5. Une fois $H(z)$ et $K(z)$ obtenues, $f_1(z)$ et $g_1(z)$ résultent de (12) et ensuite en utilisant la deuxième relation (9) on déduit $f_2(z)$. Tout calcul fait on obtient la solution du problème posée sous la forme

$$f_j(z) = \frac{1}{k_1 + k_2}\Bigg\{k_j X(z)\Bigg[M(z) + \overline{M(\bar{z})} + Q_{\varkappa'}(z) +$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int\limits_{L^+\cup\tilde{L}^+} \frac{m_1(\zeta) + m_2(\zeta)}{X^+(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{z-\zeta} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{T^+\cup\tilde{T}^+} \frac{n_2(\zeta) - n_1(\zeta)}{X^+(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{z-\zeta}\Bigg] +$$

$$+ iZ(z)\Bigg[N(z) + \overline{N(\bar{z})} + P_\varkappa(z) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{L^+\cup\tilde{L}^+} \frac{k_2 m_1(\zeta) - k_1 m_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{z-\zeta} +$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int\limits_{T^+\cup\tilde{T}^+} \frac{k_2 n_1(\zeta) + k_1 n_2(\zeta)}{Z^+(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{z-\zeta}\Bigg]\Bigg\}, \qquad j = 1, 2.$$

Cette solution est bornée au voisinage des points $e_1, e_2, \cdots, e_\beta, e'_1, e'_2, \cdots$ $\cdots, e'_\rho, e''_1, e''_2, \cdots, e''_\mu$ et dans le cas $\varkappa \geq 0$ et $\varkappa' \geq 0$ elle contient $\varkappa + \varkappa' + 2$ constantes arbitraires réelles. Si $\varkappa < 0$ ou $\varkappa' < 0$, (28), où l'on doit prendre $P_\varkappa(z) = 0$ ou $Q_{\varkappa'}(z) = 0$ représente la solution bornée au voisinage des mêmes points si et seulement si les conditions (21') et (26') sont satisfaites. L'accomplissement de ces conditions assure en même temps l'unicité de la solution.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. GOGONEA (1975) – « Rendiconti dei Lincei », *58* (5), 680–685.
[2] S. GOGONEA (1969) – « Comptes Rendus Acad. Sci. Paris », *268*, 210–213.