
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

SANDRO LEVI

**La proprietà di estensione moltiplicativa nelle
algebre di Banach**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 61 (1976), n.5, p. 333–336.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_5_333_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *La proprietà di estensione moltiplicativa nelle algebre di Banach* (*). Nota di SANDRO LEVI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — The problem (set in [2]) of characterizing the subspaces of a commutative Banach algebra enjoying the property of multiplicative extension is solved under general assumptions and examples are given. Proofs will appear in another paper.

Sia B un'algebra di Banach commutativa con identità sul corpo complesso. Un sottospazio M di B possiede la proprietà di estensione moltiplicativa (p.e.m.) in B se ogni funzionale lineare su M di norma minore o uguale a uno si può estendere ad un funzionale lineare e moltiplicativo (f.l.m.) su B .

Il primo esempio di sottospazio con queste proprietà è stato costruito da Hewitt e Kakutani [3] nell'algebra delle misure su un gruppo abeliano localmente compatto non discreto.

Più tardi Hewitt [2] ha posto il problema della caratterizzazione dei sottospazi con la p.e.m. in un'algebra di Banach commutativa qualsiasi. Tale problema è stato risolto da Phelps [4] nel caso particolare dell'algebra delle funzioni continue su uno spazio compatto di Hausdorff.

In un lavoro in corso di stampa risolviamo il problema nel caso generale, dando alcune condizioni caratteristiche che sono verificate dai sottospazi con la p.e.m. in un'algebra di Banach commutativa qualsiasi.

I. RISULTATI GENERALI

a) Consideriamo la p.e.m. da un punto di vista globale. Vedremo in seguito le condizioni affinché un singolo funzionale lineare su M si possa estendere ad un f.l.m. su B .

Sia M un sottospazio di B con la p.e.m. in B .

Si verifica allora che l'ideale generato da M è proprio; in conseguenza gli elementi di M non sono invertibili in B .

Inoltre se N è un sottospazio di M e $\overline{M}$ è la chiusura di M in B , N e $\overline{M}$ hanno la p.e.m. in B .

Vale la seguente condizione necessaria:

Lo spettro in B di ogni elemento x di M è il disco di centro l'origine e raggio $\|x\|$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. (C.N.R.).

(**) Nella seduta del 13 novembre 1976.

La definizione della p.e.m. fa intervenire il sottospazio M e l'algebra B . Si ha il seguente Teorema di passaggio fra due algebre:

Se A_M è la sottoalgebra chiusa generata da M e dall'identità in B , M ha la p.e.m. in B se e solo se M ha la p.e.m. in A_M e ogni funzionale lineare e moltiplicativo su A_M si può estendere ad un f.l.m. su B .

Una prima caratterizzazione della p.e.m. si ottiene considerando una base $\{x_i: i \in I\}$ di M . Sia J lo spettro congiunto degli x_i in B .

TEOREMA 1. *M ha la p.e.m. in B se e solo se valgono le seguenti due condizioni:*

- 1) *la trasformata di Gelfand è un'isometria su M ;*
- 2) *J è convesso e bilanciato in C^1 .*

Un'utile caratterizzazione della p.e.m. è offerta dal seguente:

TEOREMA 2. *M ha la p.e.m. in B se e solo se ogni sottospazio di dimensione finita di M ha la p.e.m. in B .*

b) Chiediamoci ora sotto quali condizioni un funzionale lineare L su M si possa estendere ad un f.l.m. su A_M .

TEOREMA 3. *L si può estendere ad un f.l.m. su A_M se e solo se per ogni sottoinsieme finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ di M ed ogni polinomio complesso p in n variabili è verificata la disuguaglianza:*

$$|p[L(x_1), \dots, L(x_n)]| \leq \|p(x_1, \dots, x_n)\|,$$

o, equivalentemente:

$$|p[L(x_1), \dots, L(x_n)]| \leq \|p(x_1, \dots, x_n)\|_\infty,$$

dove $\|p(x_1, \dots, x_n)\|_\infty$ è il raggio spettrale di $p(x_1, \dots, x_n)$.

Come diretta conseguenza si ha il

TEOREMA 4. *Se M ha la p.e.m. in B e S è un sottoinsieme linearmente indipendente di M , allora S è anche algebricamente indipendente.*

Osserviamo che il Teorema 3 permette di dare una dimostrazione diretta del seguente noto fatto (cfr. ad esempio [1]): Sia $\{x_i: i \in I\}$ una famiglia di elementi di B e A la sottoalgebra chiusa generata dagli x_i . Siano J_B e J_A gli spettri congiunti degli x_i in B ed A rispettivamente. Allora J_A è l'involuppo polinomiale convesso di J_B in C^1 .

c) Se M ha la p.e.m. in B , M è contenuto in un sottospazio massimale per la p.e.m. che è chiuso in B . Un criterio di massimalità è il seguente:

Se la cardinalità dell'insieme $\{\xi \text{ f.l.m. su } B: \xi|_M = 0\}$ è strettamente minore di $2^{\aleph_0}$, la chiusura di M è massimale per la p.e.m. in B .

Come corollario di questo criterio si dimostra che se M ha la p.e.m. in B e separa i punti dello spettro di B , la chiusura di M è massimale per la p.e.m. in B ed inoltre nessun sottospazio chiuso proprio di M separa i punti dello spettro di B .

2. ESEMPI E COSTRUZIONI

a) Sia M uno spazio di Banach. È possibile costruire un'algebra di Banach B tale che M sia isometricamente immerso in B e abbia la p.e.m. in B .

Sia V la palla unitaria del duale M' di M dotata della topologia $\sigma(M', M)$ e sia A l'algebra generata da M in $C(V)$ (algebra delle funzioni continue su V). Allora lo spettro di A è V e M è massimale per la p.e.m. in $C(V)$.

b) Sia B un'algebra di funzioni su uno spazio compatto non numerabile e metrizzabile. Esiste allora un'isometria $T: B \rightarrow B$ tale che $T(B)$ abbia la p.e.m. in B .

c) Sia $\{x_i: i \in I\}$ un insieme di elementi di un'algebra B con potenze indipendenti, secondo la definizione di J. H. Williamson [6]. (Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ è un sottoinsieme di $\{x_i: i \in I\}$ e $p(t_1, \dots, t_n) = \sum a_{i_1 \dots i_n} t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}$ è un polinomio a coefficienti complessi in n variabili si ha:

$$\|p(x_1, \dots, x_n)\| = \sum |a_{i_1, \dots, i_n}| \|x_1\|^{i_1} \dots \|x_n\|^{i_n}.$$

Il legame fra questa nozione e la p.e.m. è dato dal

TEOREMA 5. *Sia M il sottospazio generato dagli x_i e A_M la sottoalgebra chiusa generata da M e dall'identità. Allora M ha la p.e.m. in A_M .*

d) Sia G un gruppo abeliano localmente compatto non discreto e $M(G)$ l'algebra delle misure su G .

Il Teorema 5 può essere utilizzato per ottenere una altra dimostrazione del risultato di Hewitt e Kakutani, cui abbiamo accennato all'inizio, secondo il quale il sottospazio delle misure continue concentrate su un sottoinsieme compatto e indipendente di G ha la p.e.m. in $M(G)$.

Come risultato affine, appoggiandoci ad un risultato di A. B. Simon [5], abbiamo dimostrato il

TEOREMA 6. *Sia m una misura su G non negativa, continua e con potenze a due a due singolari. Allora lo spettro di m in $M(G)$ è il disco di centro l'origine e raggio $\|m\|$. Inoltre m è un divisore generalizzato dello zero nella sottoalgebra generata dalle misure assolutamente continue rispetto ad m .*

Notiamo che in [6] Williamson aveva congetturato che una misura m hermitiana con potenze indipendenti (e quindi continua) avesse per spettro il disco di centro l'origine e raggio $\|m\|$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI (1967) - *Théories spectrales*, Hermann, Paris.
- [2] E. HEWITT (1963) - *Measure algebras on locally compact abelian groups: a case history in functional analysis*, « Studia Math. (Ser. Specjalna) Zeszyt », I, 41-52.
- [3] E. HEWITT e S. KAKUTANI (1960) - *A class of multiplicative linear functionals on the measure algebra of a locally compact abelian group*, « Illinois J. Math. », 4, 553-574.
- [4] R. R. PHELPS (1964-65) - *A problem of Hewitt on restrictions of multiplicative linear functionals*, « Studia Math. », 25, 1-3.
- [5] A. B. SIMON (1963) - *The ideal space and Shilov boundary of a subalgebra of measures on a group*, « J. Math. Anal. Appl. », 6, 266-276.
- [6] J. H. WILLIAMSON (1966) - *Banach algebra elements with independent powers, and theorems of Wiener-Pitt type*. Function algebras (Proc. Internat. Sympos. on function algebras, Tulane Univ., 1965, pp. 186-197), Scott-Foresman, Chicago Ill.