
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ALDO RUSCITTI

**Un teorema di non esistenza per una classe di grafi
planari**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 61 (1976), n.5, p. 323–328.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_5_323_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Teorie combinatorie. — *Un teorema di non esistenza per una classe di grafi planari* (*). Nota di ALDO RUSCITTI (**), presentata (***) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Let $F_{n,n-1}$ denote the set of all maximal planar graphs with exactly $n-1$ vertices of degree five and one of degree $n-7$. In this article we prove and extend a conjecture stated by R. H. Fox: i.e. that for $n \geq 13$ the set $F_{n,n-1}$ is empty.

I. INTRODUZIONE

Un grafo G_n , ad n vertici, *planare*, lo diremo *semplice e massimale* ([4], [6]) se in esso non vi sono cappi ed archi multipli e si sono tracciati tutti gli archi possibili senza comprometterne la planarità. In tale grafo tutte le facce sono triangolari ([4], p. 6), anche la faccia esterna F_∞ .

Indichiamo con $F_{n,k}$ la famiglia dei grafi planari semplici e massimali (g.p.s.m.) ad n vertici contenenti esattamente k ($k \leq n$) vertici di valenza 5 (la valenza essendo, per ogni vertice, nella terminologia di O. Ore, il numero degli archi afferenti a quel vertice) ed $n-k$ vertici di valenza non inferiore a 6. È noto che:

- (1.1) $F_{n,k}$ è vuota se $k < 12$ (ad esempio: [3], p. 43);
- (1.2) $F_{12,12}$ si riduce al grafo proiezione dell'icosaedro;
- (1.3) $F_{13,12}$ è ipotizzata (non dimostrata) vuota da R. H. Fox (come riferito in [1], p. 836);
- (1.4) $F_{n,12}$ ($n > 13$) è dimostrata non essere vuota in [8] contro una congettura di R. H. Fox ([5], p. 179).

In questa Nota si dimostra, confermando ed estendendo l'ipotesi in (1.3), che la famiglia dei g.p.s.m. $F_{n,n-1}$ ($n \geq 13$) è vuota.

Notiamo che l'importanza delle famiglie $F_{n,k}$ è collegata al fatto che, ove esistano grafi planari non soddisfacenti l'ipotesi dei quattro colori relativa ai vertici, vi è almeno un siffatto grafo appartenente ad una $F_{n,k}$ per un qualche valore almeno di k ([2], [4], p. 118).

Diamo ora alcune *definizioni* utili nel seguito. Diremo «*triangolante*» con un vertice (arco) un arco (vertice) che sia ad esso opposto in una faccia di un G_n planare semplice massimale. In un grafo di tal tipo vi sono, per ogni arco, due vertici triangolanti. Se la valenza di un vertice v è $\rho(v)$ vi sono evi-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNAFA-CNR.

(**) Istituto di Calcolo delle Probabilità dell'Università di Roma.

(***) Nella seduta del 13 novembre 1976.

dentemente $\rho(\mathbf{v})$ archi triangolanti con tale vertice. Ove siano stati tracciati $\rho(\mathbf{v}) - s$ ($\rho(\mathbf{v}) \geq s \geq 1$) di tali archi, diremo «operazione di completamento (ρ : completamento) del circuito di centro \mathbf{v} » l'operazione che consiste nel tracciare i residui s archi.

Un grafo planare si dirà internamente triangolato (i.t.) (vedi [7]) se la G -frontiera ([4], p. 5: è la frontiera della F_∞) è un circuito semplice e il G -dominio ([4], p. 5: è la parte del grafo interna alla G -frontiera) è massimale (e, quindi, triangolato).

Dato un G' planare internamente triangolato siano \mathbf{a} e \mathbf{b} due vertici non adiacenti della G -frontiera di G' (che diremo G' -frontiera). Consideriamo (in F_∞) l'arco (\mathbf{a}, \mathbf{b}) : denominiamo « (\mathbf{a}, \mathbf{b}) -interno» il sottoinsieme limitato di F_∞ che possiede come frontiera: (\mathbf{a}, \mathbf{b}) ed una delle due sequenze di archi che sulla G' -frontiera collegano \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Si osservi infine che quanto elaborato in questa Nota potrebbe interpretarsi nell'ambito dei grafi duali dei grafi considerati (trattando quindi di grafi cubici); inoltre è ovvio che il ruolo giocato dalla F_∞ può essere svolto da una qualunque faccia interna del grafo: più in generale non variano i risultati di questo lavoro per isomorfismi condotti sulle rappresentazioni grafiche utilizzate.

2. DUE LEMMI

Ove esista un $G_n^0 \in F_{n,n-1}$ ($n \geq 13$), l'unico vertice di valenza diversa da 5 dovrà avere valenza pari a $n - 7$, come immediatamente si ricava dalla formula di Eulero per i poliedri nella versione relativa ai g.p.s.m. (cfr. tra gli altri [3], p. 43). Costruiamo il grafo planare i.t. G' di vertice centrale \mathbf{o} di valenza $n - 7$ (vedi fig. 1). La valenza in G' di ogni vertice della G' -frontiera è 3.

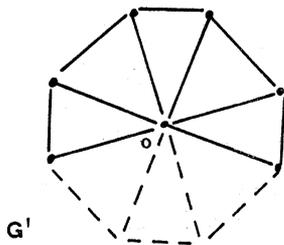


Fig. 1.

Il grafo G_n^0 deve potersi costruire a partire dal G' di fig. 1 (come dimostrato in [7]). Gli $n - 7$ vertici della G' -frontiera e i sei vertici ulteriori di G_n^0 (posti nella F_∞ di G') costituiranno l'insieme dei vertici a valenza 5 di G_n^0 , che avrà G' come sottografo proprio. Proviamo ora che:

LEMMA 1. *In G_n^0 non possono esistere archi congiungenti vertici non adiacenti della G' -frontiera.*

Dimostrazione. Si noti che se la tesi *non* sussiste, deve valere la seguente ipotesi *A*: esiste in G_n^0 almeno un arco (a, b) unente vertici non consecutivi della G' -frontiera, tale che nell' (a, b) -interno non vi siano altri archi dello stesso tipo. Supposta verificata l'ipotesi *A*, dimostriamo il Lemma per assurdo.

Il vertice c , triangolante con (a, b) (nell' (a, b) -interno) in G_n^0 , è quindi uno dei sei vertici a valenza 5 posti nella F_∞ di G' . Tracciamo (vedi fig. 2) (a, c) e (c, b) . Si è ottenuto: $\rho(a) = \rho(b) = 5$. Occorre quindi *completare* (nell' (a, b) -interno) il circuito di centro b tracciando (c, f) , e quello di centro a tracciando (c, e) (cfr. fig. 2).

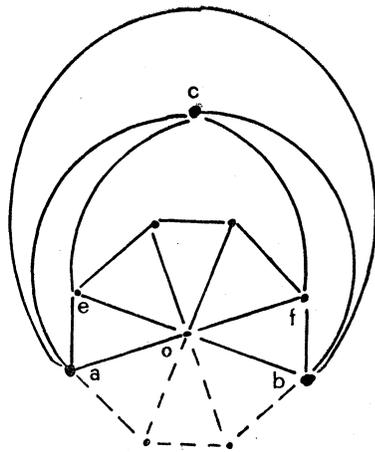


Fig. 2.

Se e coincide con f , giungiamo all'assurdo che in G_n^0 la valenza di e è 4 e quella di c è 3.

Se e non coincide con f occorre tracciare il quinto arco afferente a c ; non può essere (c, h) , $h \in G'$ -frontiera, poichè: I) se (h, e) ed (h, f) appartengono alla G' -frontiera, si ha in G_n^0 che $\rho(h) = \rho(e) = \rho(f) = 4$; II) se uno almeno dei due archi (h, e) o (h, f) non appartiene alla G' -frontiera, per completare il circuito di centro c occorre tracciare l'arco (h, e) o l'arco (h, f) (uno almeno tra di essi: quello non presente sulla G' -frontiera): e questo è contrario alla ipotesi *A*.

Dovrà quindi esistere un vertice $d \in G_n^0$, $d \notin G'$ -frontiera, adiacente a c : vedi fig. 3. Completiamo il circuito di centro c tracciando (d, e) e (d, f) . Si ottiene: $\rho(e) = \rho(f) = 5$. Occorre quindi completare i circuiti di centri e ed f : tracciamo (d, i) e (d, m) .

Se i coincide con m , d ed i avranno in G_n^0 valenza 4, il che è assurdo. Notiamo che se $n = 13$ la dimostrazione ha qui termine.

Se i non coincide con m è necessario distinguere: se $(i, m) \in G'$ -frontiera, in G_n^0 abbiamo $\rho(d) = 5$, ma $\rho(i) = \rho(m) = 4$; se $(i, m) \notin G'$ -frontiera, occorre completare il circuito di centro d (che ha valenza 5) tracciando l'arco (i, m) , contro l'ipotesi *A*. Si ha così l'asserto.

Segue dal Lemma 1 che da ogni vertice della G' -frontiera escono due archi diretti verso due dei sei vertici di G_n^0 posti nella F_∞ di G' .

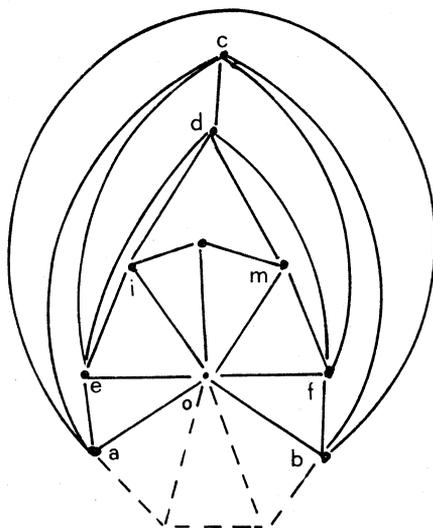


Fig. 3.

Proviamo ora che:

LEMMA 2. Ognuno dei sei vertici di G_n^0 appartenenti alla F_∞ di G' può essere adiacente a non più di due vertici della G' -frontiera.

Dimostrazione. Si noti, ove esista un $v_0 \in G_n^0$, $v_0 \notin G'$, adiacente a più di due vertici della G' -frontiera, che:

i) se in G_n^0 esiste l'arco (v_0, a) , $a \in G'$ -frontiera, in G_n^0 deve esistere anche l'arco (v_0, b) , $b \in G'$ -frontiera ed adiacente ad a . Infatti, sia $v'_0 \in G_n^0$, $v'_0 \notin G'$, sicchè (v'_0, a) costituisca il quinto arco uscente da a (cfr. fig. 4 a). Il completamento del circuito di centro a conduce alla costruzione degli archi (v_0, v'_0) , (v_0, b) , (v'_0, c) con b e c appartenenti alla G' -frontiera ed adiacenti ad a .

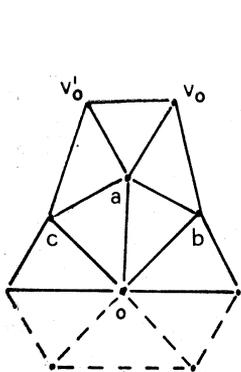


Fig. 4 a.

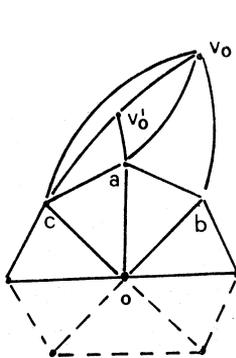


Fig. 4 b.

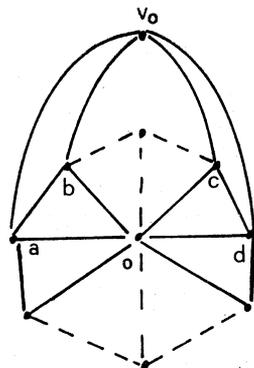


Fig. 4 c.

ii) v_0 non può essere adiacente a tre vertici consecutivi della G' -frontiera. Infatti (vedi fig. 4 b) sia v_0 adiacente a c , a , b (nell'ordine, sulla G' -frontiera). Essendo in G_n^0 $\rho(a) = 5$, a risulterà adiacente ad un $v'_0 \notin G'$. Il completamento del circuito di centro a (fig. 4 b) porta a $\rho(v'_0) = 3$ in G_n^0 . Il che è impossibile.

Da i) e da ii) segue che il v_0 ipotizzato è sempre adiacente ad un numero pari di vertici della G' -frontiera. Dovendo in G_n^0 risultare $\rho(v_0) = 5$, v_0 sarà adiacente ad esattamente quattro vertici della G' -frontiera: siano a , b , c , d adiacenti a coppie tra loro separate (a e b , c e d : cfr. la fig. 4 c). Il quinto vertice del circuito di centro v_0 sia $v''_0 \in G_n^0$, $v''_0 \notin G'$. Il completamento del circuito di centro v_0 (che interesserà i vertici a , b , c , d e v''_0) necessiterà allora dell'arco (b, c) o dell'arco (a, b) , in contrasto con il Lemma 1. Il v_0 ipotizzato non può pertanto sussistere. Ne segue l'asserto.

3. IL TEOREMA DI NON ESISTENZA

Possiamo ora dimostrare il conclusivo

TEOREMA. *La famiglia dei g.p.s.m. $F_{n,n-1}$ ($n \geq 13$) è vuota.*

Dimostrazione. Dai vertici della G' -frontiera (cfr. fig. 1) escono, per il Lemma 1, esattamente $2(n-7)$ archi diretti verso i sei vertici di G_n^0 posti nella F_∞ di G' , esterni a G' , escono, diretti ai vertici della G' -frontiera, non più di 12 archi (vedi Lemma 2). Quanto affermato ora deve valere per ogni $G_n^0 \in F_{n,n-1}$, con $n \geq 13$.

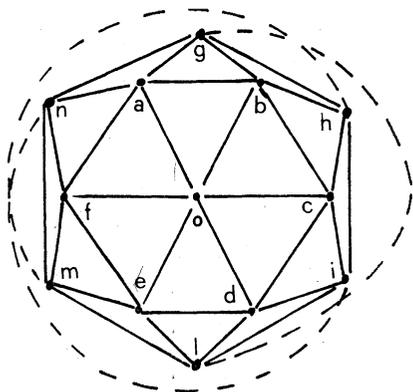


Fig. 5.

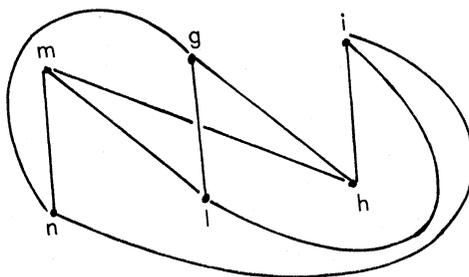


Fig. 6.

Per $n > 13$, risultando in tal caso $2(n-7) > 12$, il Teorema è dimostrato.

Per $n = 13$, dai Lemmi 1 e 2 segue che l'unica configurazione possibile è quella di cui in fig. 5 (archi a tratto pieno), con a , b , c , d , e ed f sulla G' -frontiera, e g , h , i , l , m , n nella F_∞ di G' . Si sono, in fig. 5, completati i circuiti di centro a , b , ..., f tracciando rispettivamente gli archi (n, g) , (g, h) , ...

..., (m, n) . Per completare il G_{13}^0 occorre aggiungere *tre archi* che uniscano a coppie i sei vertici g, h, \dots, n . È immediato constatare che è solo possibile unire un vertice con il suo opposto (g con l , h con m , n con i) giacchè altrimenti (ad esempio unendo g con m) si otterrebbe un vertice (n) con valenza finale pari a 4. Il G_{13}^0 unico possibile deve pertanto essere quello di fig. 5 (considerando anche gli archi a tratteggio) che però risulta *non planare*, contenendo un sottografo (esplicitato in fig. 6) isomorfo al simuloide a sei vertici di Kuratowski. Da cui la tesi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. R. ALPERT e J. L. GROSS (1975) - *Graph imbedding problems*, « The Am. Math. Monthly », 82, 835-837.
- [2] G. D. BIRKHOFF (1913) - *The reducibility of maps*, « Am. J. Math. », 35, 115-128.
- [3] M. ERRERA (1925) - *Une contribution au probleme des quatre couleurs*, « Bull. de la Soc. Math. de France », 53, 42-55.
- [4] O. ORE (1967) - *Four-color problem*, New York, Academic Press.
- [5] G. RINGEL (1974) - *Map color theorem*, Berlin, Springer-Verlag.
- [6] A. RUSCITTI (1976) - *Un metodo canonico di costruzione e riduzione relativo a grafi planari massimali*, « Calcolo », 13, 157-171.
- [7] A. RUSCITTI - *Sui grafi planari internamente triangolati*. Inviato per pubblicazione a « Calcolo ».
- [8] A. RUSCITTI - *Su di un problema di A. M. Hobbs*. In corso di stampa su « Calcolo ».