Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Gallavotti

Funzioni zeta ed insiemi basilari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.5, p. 309–317.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_5_309_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 novembre 1976

Presiede il Presidente della Classe BENIAMINO SEGRE

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Funzioni zeta ed insiemi basilari.* Nota di GIOVANNI GALLAVOTTI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — We give an example of a smooth flow with a basic set whose zeta-function is not meromorphic.

§ 1. INTRODUZIONE

Le funzioni zeta cui si rivolge l'attenzione in questo lavoro sono funzioni di una variabile complessa che nascono dal problema dell'analisi della distribuzione dei periodi delle orbite periodiche generate in uno spazio M da gruppi di trasformazioni omomorfi ad R o ad N (caso continuo o discreto, rispettivamente).

Queste funzioni descrivono la distribuzione dei periodi delle orbite periodiche nello stesso senso in cui la funzione zeta di Riemann descrive la distribuzione dei logaritmi dei numeri primi.

Nel caso in cui il gruppo di trasformazioni sia un gruppo omomorfo ad N di diffeomorfismi su una varietà Riemanniana e, inoltre, tale gruppo verifichi l'assioma A (cfr. appendice 2), si può mostrare che la funzione zeta ad esso associata è una funzione meromorfa.

Ci proponiamo di dimostrare con un esempio che questa proprietà non si estende, in generale, al caso in cui il gruppo di trasformazioni, pur verificando l'assioma A, sia omomorfo a R.

Questo lavoro, proponendo un esempio, è di natura molto tecnica ed in esso si assumerà che il lettore abbia già familiarità con il problema ed il suo interesse (si veda, allo scopo, il lavoro [1]), Cap. I, § 1, 2, 3 e Cap. II, § 1).

Nella appendice 2 diamo alcune definizioni che, in linea di principio, rendono il lavoro leggibile senza ricorrere alla bibliografia. Sono definizioni date a scopo puramente notazionale; per una discussione sul loro interesse si veda [1].

(*) Nella seduta del 13 novembre 1976.

§ 2. Posizione del problema

Nello studio delle proprietà generali delle orbite periodiche rispetto a gruppi di diffeomorfismi omomorfi a N o R appare utile l'analisi delle proprietà delle funzioni «zeta» ad essi associate [1].

Sia M una varietà Riemaniana compatta e sia $S_t : M \leftrightarrow M$, $t \in R$, un C^r–flusso, $(1 \leq r \leq \infty)$, su M (che, ovviamente, sarà supposta di classe C^r almeno).

Si supponga che l'insieme Ω dei punti «non erranti», [1], contenga un insieme «basilare» Λ ossia un insieme chiuso, S_t–invariante $(\forall t \in R)$ tale che

i) Λ non contiene punti fissi per S_t, $\forall t \in R$, ed è un insieme iperbolico per il flusso;
ii) le orbite periodiche contenute in Λ sono dense in Λ;
iii) Λ contiene un'orbita densa;
iv) Esiste un insieme aperto $U \supset \Lambda$ tale che: $\Lambda = \bigcap_{t \in R} (S_t U)$.

Assoceremo ad ogni orbita periodica $\gamma \subset \Lambda$ il suo periodo $T(\gamma)$. L'insieme delle orbite periodiche per il flusso in questione si denoterà op $(S_t)_{t \in R}$.

Se Λ è un insieme basilare la funzione zeta per il flusso ristretto a Λ è definita dal prodotto infinito:

$$(*) \qquad \zeta(s) = \prod_{\substack{\gamma \in \mathrm{op}(S_t)_{t \in R} \\ \gamma \subset \Lambda}} (1 - \exp - sT(\gamma))^{-1} \qquad s \in \mathbf{C}$$

che si può dimostrare convergente per $\mathrm{Re}(s)$ abbastanza grande [1, 3].

Esistono flussi i cui insiemi basilari hanno una funzione zeta meromorfa (cioè (*) ammette un'estensione meromorfa a **C**), [3].

Le definizioni appena discusse possono essere date, per naturale analogia anche nel caso in cui il gruppo $(S_t)_{t \in R}$ venga sostituito da un gruppo $(S^n)_{n \in N}$ omomorfo al gruppo dei numeri interi.

Le definizioni sono tutte ovvie, [1], con l'eccezione che nella definizione di insieme basilare la condizione di assenza di punti fissi è lasciata cadere.

Così, ad esempio, se $\Lambda \subset M$ è un insieme basilare per il gruppo $(S^n)_{n \in N}$ di diffeomorfismi su M, si definisce:

$$(**) \qquad \zeta(s) = \prod_{\substack{\gamma \in \mathrm{op}(S^n)_{n \in N} \\ \gamma \subset \Lambda}} (1 - \exp - sT(\gamma))^{-1}$$

ed ora $T(\gamma)$ è un intero; si può dimostrare che il prodotto infinito (**) converge per $\mathrm{Re}(s)$ abbastanza grande [3].

Si dimostra che la funzione zeta associata ad un insieme basilare di un gruppo $(S^n)_{n \in N}$ discreto è sempre una funzione meromorfa [4, 3].

Il principale risultato di questo lavoro è la costruzione di un C^r–flusso con un insieme basilare la cui funzione zeta non è meromorfa $(1 \leq r < \infty)$. Questo esempio può essere utilizzato per costruire un C^r–flusso che verifica l'assioma A e la cui funzione zeta non si estende ad una funzione meromorfa su **C** $(1 \leq r < \infty)$: si veda in proposito l'osservazione finale dell'appendice 2.

Nel seguito si utilizzerà la seguente osservazione: in generale si può cercare di definire, mediante le (*) e (**), la funzione zeta associata ad un gruppo di trasformazioni, omomorfo ad R o N, di uno spazio astratto K in se e ad un insieme invariante rispetto all'azione del gruppo, $L \subset K$: però l'ascissa di convergenza del prodotto infinito sarà, assai spesso, infinita. Nel seguito, considerando funzioni zeta associate ad insiemi invarianti supporremo sempre, ove ciò non sia conseguenza delle ipotesi, che il prodotto infinito in questione converga per $\mathrm{Re}(s)$ abbastanza grande.

§ 3. FUNZIONI ZETA GENERALIZZATE

Nella costruzione del nostro esempio appare utile considerare una generalizzazione di (**), [3, 5].

Sia $(S^n)_{n\in N}$ un gruppo omomorfo al gruppo degli interi di trasformazioni definite su uno spazio M; sia Λ un insieme invariante rispetto all'azione del gruppo.

Si può definire l'insieme $\mathrm{op}\,(S^n)_{n\in N}$ delle orbite periodiche ed il periodo $T(\gamma)$ di $\gamma \in \mathrm{op}\,(S^n)_{n\in N}$.

Sia $f: M \to R$ una funzione reale definita su M; si definisce il periodo «f–pesato» di $\gamma \in \mathrm{op}\,(S^n)_{n\in N}$ la quantità:

$$T_f(\gamma) = \sum_{j=0}^{T(\gamma)-1} f(S^j x)$$

ove x è un qualunque punto di γ.

La funzione zeta con peso f relativa all'insieme Λ ed al dato gruppo di trasformazioni di M è definita da:

$$\zeta(s, f) = \prod_{\substack{\gamma \in \mathrm{op}(S^n)_{n\in N} \\ \gamma \subset \Lambda}} (1 - \exp - sT_f(\gamma))^{-1}.$$

È utile, per dare un'espressione alternativa alla zeta, introdurre l'insieme $\widetilde{\mathrm{op}}\,(S^n)_{n\in N}$ delle coppie (γ, k) ove $\gamma \in \mathrm{op}\,(S^n)_{n\in N}$ e $k = 1, 2, 3, \cdots \in N^+$.

Questo insieme è «l'insieme delle orbite periodiche» con periodo «non minimo». Si porrà:

$$T(\tilde\gamma) = T((\gamma, k)) = kT(\gamma) \quad ; \quad T_f(\tilde\gamma) = T_f((\gamma, k)) = kT_f(\gamma)$$
$$\text{e} \quad \tilde\gamma \subset \Lambda \quad \text{se} \quad \tilde\gamma = (\gamma, k), \gamma \subset \Lambda.$$

Semplici considerazioni combinatorie mostrano che:

$$\zeta(s, f) = \exp \sum_{\tilde\gamma \in \widetilde{\mathrm{op}}(S^n)_{n\in N}} e^{-sT_f(\tilde\gamma)}.$$

L'interesse di queste ulteriori generalizzazioni delle funzioni zeta sta nel seguente facile Lemma [5]:

LEMMA. *Sia* M *uno spazio sul quale è definito un gruppo* $(S^n)_{n\in N}$ *di trasformazioni che lasciano invariante* $\Lambda \subset M$. *Sia* $f: M \to R$ *una funzione positiva su* M.

Sia $(S_t)_{t\in R}$ *il «flusso speciale» (cfr. appendice 2) costruito su* Λ *a mezzo della funzione* f *e del dato gruppo di trasformazioni.*

Se ora $\zeta(s)$ *denota la funzione zeta associata al flusso speciale e* $\zeta(s, f)$ *denota la funzione zeta con peso* f *associata all'insieme* Λ *e al gruppo* $(S^n)_{n\in N}$, *si ha* $\zeta(s) = \zeta(s, f)$, *se* $\operatorname{Re}(s)$ *è grande, purché i prodotti infiniti che definiscono* $\zeta(s)$ *e* $\zeta(s, f)$ *convergano per* $\operatorname{Re}(s)$ *abbastanza grande.*

Questo Lemma sarà utilizzato insieme al seguente Teorema [2]:

TEOREMA. *Sia* S *la traslazione di una unità verso destra sullo spazio* K *delle successioni bilatere di simboli* 0 *e* 1 *e sia* f *una funzione Hölderiana e positiva su* K [(1)].

Il flusso speciale su K, *definito da* S *ed* f, *può essere immerso, in qualità di insieme basilare, in un* C^r*–flusso,* $1 \leq r < \infty$, *su una varietà compatta Riemanniana finito-dimensionale.*

Usando i due ultimi Teoremi la costruzione del nostro esempio può procedere via la costruzione di una funzione positiva ed Hölderiana su K, la cui funzione zeta generalizzata, rispetto alla traslazione S, non sia estendibile ad una funzione meromorfa su **C**.

§ 4. ALCUNE FUNZIONI HÖLDERIANE E LA LORO FUNZIONE ZETA

Sia $K = \prod_{i\in N} \{0, 1\}$ = (spazio delle successioni bilatere di simboli 0 e 1) riguardato come uno spazio metrico con la metrica

$$d_a(\{\xi_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}, \{\eta_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}) = a^P$$

ove P = massimo numero k fra quelli per cui $\xi_j = \eta_j$ se $|j| \leq k$, ed a è un numero prefissato in $(0, 1)$.

Una funzione f su K si dice Hölderiana [2] su K se esiste $a \in (0, 1)$ tale che: $\sup_{x,y\in K} (|f(x) - f(y)|/d_a(x, y)^{-1}) < +\infty$.

È facile costruire esempi di funzioni Hölderiane su K; ne vedremo alcuni interessanti fra poco.

Si considerino gli elementi di K come sottoinsiemi di N: un punto $x = (\xi_i)_{i=-\infty}^{+\infty} \in K$ sarà identificato con l'insieme: $X(x) = \{i \mid i \in N, \xi_i = 1\}$.

Sia Φ una funzione definita sui sottoinsiemi finiti di N e tale che esista $\varkappa > 0$ per cui:

i) $\sum_{\{0\}\subset X} |\Phi(X)| \exp x\,(\text{diametro } X) < +\infty$

ii) $\Phi(X) = \Phi(Y)$ se X e Y sono congruenti.

Definiamo allora, sui sottoinsiemi di N (finiti e non) la funzione A_Φ:

$$A_\Phi(X) = \sum_{\{0\}\subset L\subset X} \frac{\Phi(L)}{|L|}$$

(1) Si veda il § 4 per una definizione di questi termini.

ove $|L| =$ numero dei punti di L, e la somma è eseguita al variare di L sugli insiemi finiti contenuti in X.

Per la convenuta identificazione fra i punti di K ed i sottoinsiemi di N, la funzione A può essere considerata una funzione definita su K.

È facile vedere che A_Φ è una funzione Hölderiana su K.

Considereremo il seguente caso particolare (« modello di Fisher » [7]):

$$\Phi(L) \equiv 0 \qquad \text{a meno che} \quad |L| = (\text{diametro di } L + 1)$$

se, invece, $L = (i, i+1, i+2, \cdots, i+j-1)$ per qualche coppia di interi i, j si porrà:

$$\Phi(L) = \varphi_j .$$

Questo « modello » è una ben nota « macchina » per costruire esempi e controesempi nella teoria delle transizioni di fase [7, 8].

Sia $G > 0$ tale che $\min(G + A_\Phi) > 0$ e si ponga: $f = G + A_\Phi$ ed, inoltre,

$$W_l = l \sum_{i=1}^{l} \varphi_i - \sum_{i=1}^{l-1} i\varphi_{i+1} \quad , \quad l \in N^+$$

$$\Phi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \quad ; \quad \Phi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} i\varphi_i .$$

LEMMA. *La funzione* $\zeta(s, f)$ *è data da*:

$$\zeta(s, f)^{-1} = (1 - e^{-Gs})(1 - e^{-Gs-\Phi_0 s})(1 - F(s))$$

ove

$$F(s) = \frac{e^{-Gs+s\Phi_1}}{1 - e^{-Gs}} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-lGs} e^{-sW_l} .$$

La dimostrazione di questo Lemma consiste in un calcolo che procede, senza alcuna difficoltà concettuale, lungo le linee dell'articolo [7], si veda l'appendice per una concisa esposizione della tecnica di [7].

Se $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ è definita da:

$$\varphi_1 \ \text{arbitrario}, \quad \varphi_n = x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} \qquad n \geq 2 , \qquad \text{ove}$$

$$x_n = \log\left(1 + \frac{\lambda^n}{n}\right) \qquad n \geq 1 \ , \ \lambda < 1 \quad ; \quad x_0 = 0 .$$

Segue che: $W_n = n\Phi_0 - \Phi_1 - \log\left(1 + \dfrac{\lambda^n}{n}\right)$.

L'esempio è allora costruito poiché la funzione

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(G+\Phi_0)sn} \left(1 + \frac{\lambda^n}{n}\right)^s$$

non è estendibile ad una funzione meromorfa e presenta una singolarità non polare in $s_0 = (\log\lambda)/(G + \Phi_0) < 0$.

Si noti anche in $s = 0$ non vi è una singolarità per $\zeta(s, f)$ ed, anzi, $\zeta(0, f) = -1$.

Appendice 1. Dimostrazione del Lemma del § 4

Questa appendice contiene una dimostrazione del Lemma del § 4 attraverso un semplice adattamento di [7].

Calcoleremo dapprima, per $\xi \in \mathbf{C}$:

$$\Delta(\xi) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \xi^p \sum_{S^p x = x} e^{-T_{A_\Phi}(x)}.$$

I punti $x \in K$ tali che $S^p x = x$ possono essere identificati (secondo quanto già spiegato al § 3) con i sottoinsiemi di N periodici e con periodo p ovvero, equivalentemente, con i sottoinsiemi dell'insieme $\{1, 2, \cdots, p\} \subset N$.

Scegliendo la seconda delle alternative ora descritte, chiameremo un sottoinsieme $X \subset \{1, 2, \cdots, p\}$ una « configurazione ».

Se si immagina di raggruppare i siti in $\{1, 2, \cdots, p\} - X$, « siti vuoti », in gruppi connessi e se, similmente, i punti di X, « siti pieni » vengono raggruppati in insiemi connessi si può descrivere una configurazione a mezzo di una successione di interi secondo le sei possibilità seguenti:

I) $(v_1, o_1, v_2, o_2, \cdots, v_k, o_k, v_{k+1})$, ove $v_i > 0$, $o_i > 0$, $\forall i$,

e $v_1, \cdots, v_{k+1}$ denotano i numeri dei siti vuoti nei vari gruppi connessi di siti vuoti numerati ordinatamente da sinistra a destra; $k \geq 1$ e, infine,

$$\sum_{i=1}^{k+1} v_i + \sum_{i=1}^{k} o_i = p.$$

Continuando la casistica, con simili notazioni, le altre possibilità sono:

II) $(v_1, o_1, \cdots, v_k, o_k)$, $o_i > 0$, $v_i > 0$, $\forall i$, $k \geq 1$ e $\sum_{i=1}^{k} v_i + \sum_{i=1}^{k} o_i = p$.

III) $(o_1, v_2, \cdots, o_k, v_{k+1})$, $o_i, v_i > 1$, $\forall i$, $k \geq 1$, e $\sum_{i=2}^{k+1} v_i + \sum_{i=1}^{k} o_i = p$.

IV) $(o_1, v_2, \cdots, v_k, o_k)$, $o_i, v_i > 1$, $\forall i$, $k \geq 2$, e $\sum_{i=2}^{k} v_i + \sum_{i=1}^{k} o_i = p$.

V) $o_1 = p$.

VI) $v_1 = p$.

Se X è del tipo I), II), III) e se $x \in K$ è il punto di K tale che $S^p x = x$ ad esso associato mediante la corrispondenza sopra descritta si trova:

$$T_{A_\Phi}(x) = \sum_{j=1}^{k} W_{o_j}$$

ove

$$W_n = n\varphi_1 + (n - 1)\,\varphi_2 + \cdots + (n - n + 1)\,\varphi_n\,.$$

Se X è del tipo IV) invece: $T_{A_\Phi}(x) = \sum_{j=2}^{k-1} W_{o_j} + W_{o_1+o_k}$.

Se X è del tipo V) si ha: $T_{A_\Phi}(x) = N \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j$.

Se X è del tipo VI), infine: $T_{A_\Phi}(x) = 0$.

È ora facile calcolare, sommando un certo numero di serie geometriche, la funzione $\xi\Delta'(\xi)$ e, quindi, $\Delta(\xi)$. Risulta che $\xi\Delta'(\xi)$ può scriversi come:

$$-\xi \frac{d}{d\xi} \log (1 - \xi) - \xi \frac{d}{d\xi} \log (1 - \xi e^{-\Phi_0}) -$$

$$-\xi \frac{d}{d\xi} \log \left(1 - \frac{\xi}{1 - \xi} \sum_{l=1}^{\infty} \xi^l e^{-W_l}\right)$$

e da questa formula il lemma da dimostrare segue immediatamente.

APPENDICE 2. ALCUNE DEFINIZIONI

DEFINIZIONE 1. *Punti erranti e non.*

Sia $(S_t)_{t\in R}$ (ovvero $(S^n)_{n\in N}$) un gruppo di trasformazioni invertibili definite e continue su uno spazio topologico M.

Un punto $x \in M$ si dirà «errante» se esiste un intorno U di x tale che $U \cap S_t(U) = \varnothing$ per ogni t tale che $|t|$ è abbastanza grande (rispettivamente, $U \cap S^n(U) = \varnothing$ per $|n|$ abbastanza grande).

È chiaro che l'insieme dei punti erranti è aperto, e quindi, quello dei punti non erranti è chiuso.

DEFINIZIONE 2. *Iperbolicità di un insieme (caso dei flussi).*

Sia $(S_t)_{t\in R}$ un gruppo di diffeomorfismi definiti su una varietà Riemanniana M compatta.

Un insieme invariante $\Lambda \subset M$ si dice «iperbolico» se è possibile trovare una decomposizione dello spazio $T_x M$, tangente ad M in $x \in \Lambda$, della forma:

$$T_x M = V_x^{(s)} + V_x^{(i)} + V_x$$

in tre sottospazi che dipendono con continuità da $x \in \Lambda$ e tali che:

1) $dS_t : V_x^{(s)} \leftrightarrow V_{S_t x}^{(s)}$; $dS_t : V_x^{(i)} \leftrightarrow V_{S_t x}^{(i)}$; $dS_t : V_x \leftrightarrow V_{S_t x}$.

2) Esistono $a, b > 0$ tali che:

$\|dS_t\|_s \leq a \exp - bt \quad t > 0$; $\|dS_t\|_i \leq a \exp(bt) \quad t < 0$; $\|dS_t\|_0 \leq a$

ove $\|dS_t\|_s, \|dS_t\|_i, \|dS_t\|_0$ denotano le norme delle restrizioni di dS_t agli spazi $V_x^{(s)}, V_x^{(i)}, V_x$ rispettivamente.

3) Dimensione di $V_x = 1$.

DEFINIZIONE 3. *Iperbolicità di un insieme (caso discreto).*

Sia $(S^n)_{n\in N}$ un gruppo di diffeomorfismi definiti su una varietà Riemanniana compatta M.

Un insieme invariante $\Lambda \subset M$ si dirà iperbolico se, per $x \in \Lambda$, esiste una decomposizione dello spazio tangente $T_x M$ della forma

$$T_x M = V_x^{(s)} \oplus V_x^{(i)}$$

in due sottospazi che dipendono con continuità da x al variare di x in Λ e tali che:

1) $dS^n : V_x^{(s)} \leftrightarrow V_{S^n x}^{(s)} \quad ; \quad dS^n : V_x^{(i)} \leftrightarrow V_{S^n x}^{(i)} \qquad n \in N$.

2) Con notazioni simili a quelle della definizione 3), esistono a e $b > 0$ tali che

$$\| dS^n \|_s \leq a \exp(-bn) \quad n > 0 \quad ; \quad \| dS^n \|_i \leq a \exp(bn) \quad n < 0 .$$

DEFINIZIONE 4. *Assioma A (Caso discreto).*

Sia $(S^n)_{n\in N}$ un gruppo di diffeomorfismi di una varietà Riemanniana compatta M. Si dirà che $(S^n)_{n\in N}$ verifica l'assioma A se:

1) l'insieme Ω dei punti non erranti è iperbolico;

2) le traiettorie periodiche sono dense in Ω.

DEFINIZIONE 5. *Assioma A (Caso continuo).*

Sia $(S_t)_{t\in R}$ un gruppo di diffeomorfismi di una varietà Riemanniana M compatta. Si dirà che $(S_t)_{t\in R}$ verifica l'assioma A se:

1) l'insieme Ω dei punti non erranti è iperbolico e contiene un numero finito di punti fissi disgiunti dal resto di Ω;

2) le traiettorie periodiche sono dense in Ω.

DEFINIZIONE 6. *Flussi speciali.*

Sia $(S^n)_{n\in N}$ un gruppo di trasformazioni di un insieme Λ in se. Sia f una funzione definita su Λ e sempre positiva.

Si consideri lo spazio $\tilde{\Lambda}_f$ delle coppie (x, m) tali che $x \in \Lambda$ e $0 \leq m \leq f(x)$. Sia Λ_f lo spazio ottenuto identificando i punti $(x, f(x))$ e $(S(x), 0)$ di $\tilde{\Lambda}_f$, $x \in \Lambda$.

Si definisce un gruppo di trasformazioni $(S_t)_{t\in R}$ di Λ_f in se al modo seguente $(t \geq 0)$:

$$S_t(x, m) = (x, m+t) \quad \text{se} \quad 0 \leq m+t \leq f(x)$$

$$S_t(x, m) = (S(x), m+t-f(x)) \quad \text{se} \quad f(x) \leq m+t \leq f(x) + f(S(x))$$

$$S_t(x, m) = (S^2(x), m+t-f(x)-f(S(x))) \quad \text{se}$$
$$f(x) + f(S(x)) \leq m+t \leq f(x) + f(S(x)) + f(S^2(x))$$

ecc.; inoltre si pone $S_{-t} = (S_t)^{-1}$ per $t \leq 0$.

Questo gruppo di trasformazioni di Λ_f in se si dice il « flusso speciale » costruito su Λ a mezzo di $(S^n)_{n \in N}$ e della funzione f.

Per capire l'interesse della nozione di insieme basilare conviene citare il seguente Teorema [1]:

TEOREMA. *Se* $(S^n)_{n \in N}$ *è un gruppo di diffeomorfismi di una varietà Riemanniana* M *compatta e* $(S^n)_{n \in N}$ *verifica l'assioma A allora l'insieme* Ω *dei, punti non erranti si decompone nell'unione di un numero finito di insiemi basilari disgiunti.*

L'ovvia versione di questo enunciato per i flussi che verificano l'assioma A è pure vera, [1].

OSSERVAZIONE. Il Teorema del § 3, sulla C^r–immergibilità di un flusso speciale costruito a mezzo di una funzione Hölderiana sullo spazio delle successioni di simboli 0 e 1 sul quale agisce il gruppo delle traslazioni, si può rinforzare in modo che l'immagine del flusso speciale costituisca, insieme a altri due punti fissi isolati, l'insieme dei punti non erranti di un C^r–flusso su una varietà Riemanniana compatta. Ciò segue da un esame della dimostrazione di [2] e dalle considerazioni sulla costruzione del « ferro di cavallo » in [1].

In base a questa osservazione si vede come l'esempio costruito in questo lavoro fornisca anche un esempio di un flusso verificante l'assioma A la cui funzione zeta non si estende ad una funzione meromorfa.

Ringraziamenti. Sono grato a D. Ruelle per aver suggerito ed incoraggiato questo lavoro: ringrazio lui ed anche R. Bowen ed F. Diliberto per molte discussioni stimolanti; in particolare R. Bowen mi ha mostrato come immergere il flusso speciale in C^r, usando il suo teorema di immersione.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. SMALE (1967) – « Bull. Am. Math. Soc. », *73*, 747.
[2] R. BOWEN (1972) – « J. Diff. Eq. », *12*, 173.
[3] D. RUELLE (1974) – *Zeta functions for expanding maps and Anosov flows*. Preprint, « IHES ».
[4] A. MANNING (1971) – « Bull. London Math. Soc. », *3*, 215.
[5] D. RUELLE (1974) – *Generalized zeta functions for axiom A basic sets*. Preprint, « IHES ».
[6] D. RUELLE (1969) – *Statistical Mechanics*, Benjamin.
[7] M. FISCHER (1967) – *Physics, Physica*, « Физика », *2*, 255.
[8] B. FELDERHOF e M. FISHER (1970) – « Ann. Phys. », *58* (quattro articoli alle pp. 176, 217, 268, 281).