Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Crupi

Urti caratteristici e stretta eccezionalità in M.F.D. con equazione di stato generalizzata

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.3-4, p. 253–259.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_3-4_253_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Fisica matematica. — *Urti caratteristici e stretta eccezionalità in* M.F.D. *con equazione di stato generalizzata* (*). Nota (**) di GIOVANNI CRUPI (***), presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — In a previous paper, considering a one dimensional M.F.D. flow with a generalized equation of state, a set of functions $p = \psi(\rho, A)$ has been determined which makes the system *completely exceptional*. In this paper we show that the same set of functions also makes the system *strictly exceptional*. In the last part we determine the evolution of the characteristic shock.

In un recente lavoro [1], nell'ambito della M.F.D. con equazione di stato dipendente, *a priori*, anche da grandezze elettromagnetiche, si è dedotto, tra l'altro, che la classe di funzioni

$$p = \psi(\rho, A) = h(A/\rho^2) - \frac{1}{\rho} g(A/\rho^2) - A \tag{1}$$

rende *completamente eccezionale* il seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial t} + v \dfrac{\partial B}{\partial x} + B \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0 \\ \rho \dfrac{\partial v}{\partial t} + \rho v \dfrac{\partial v}{\partial x} = - \dfrac{1}{\mu} B \dfrac{\partial B}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial x} . \end{cases} \tag{2}$$

Le equazioni (2) valide in un riferimento inerziale $S(O, x, y, z, t)$, sono state dedotte da un sistema più generale [2] nello schema di un flusso unidimensionale in cui si presumono: *a*) $\boldsymbol{v} \equiv (v, 0, 0)$ e $\mathbf{B} \equiv (0, 0, B)$ costanti in direzione ed ortogonali tra loro; *b*) tutte le funzioni incognite dipendenti dalla sola coordinata spaziale x e dal tempo t. Nella (1) con h e g sono state indicate due funzioni arbitrarie dell'invariante di Riemann A/ρ^2, essendo $A = \dfrac{B^2}{2\mu}$.

Nel presente lavoro, riprendendo alcuni risultati ottenuti in [1], si vuole studiare il sistema (2) in relazione all'eventuale esistenza di *urti caratteristici* [3]. Quando si ha un'onda eccezionale può esistere in concomitanza un urto che si propaga su una superficie caratteristica con la stessa velocità della corrispondente onda di discontinuità. Tali urti, se esistono, si dicono *caratteristici*.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei contratti di Ricerca del C.N.R., G.N.F.M.
(**) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1976.
(***) Istituto Matematico dell'Università di Messina.

La loro legge di evoluzione può essere determinata senza ricorrere, come si fa usualmente, alla legge di crescenza dell'entropia. Se tutti gli urti sono caratteristici, allora il sistema differenziale si dice *strettamente eccezionale* [4].

Ovviamente, la problematica considerata nei citati lavori, accanto all'intrinseco valore matematico, acquista rilevante interesse come teoria di fenomeni fisici nella misura in cui si riscontra la effettiva esistenza di sistemi differenziali della Fisica matematica che ammettono onde eccezionali ed urti caratteristici.

Nell'ambito di tali ricerche si inserisce il presente lavoro, nel quale si dimostra che le equazioni (2), associate alla (1), forniscono un esempio di sistema differenziale che, oltre ad essere completamente eccezionale [1], è anche strettamente eccezionale.

Più precisamente, nel n. 1 si dimostra che tutti gli urti sono caratteristici e nel n. 2 si determina la loro legge di evoluzione.

N. 1. Il sistema (2) si può porre nella forma conservativa

$$\partial_t f^\circ + \partial_x f = 0 \tag{3}$$

dove

$$f^0 = \begin{Vmatrix} B \\ \rho \\ \rho v \end{Vmatrix} \quad , \quad f = \begin{Vmatrix} vB \\ \rho v \\ \rho v^2 + A + \psi \end{Vmatrix} . \tag{4}$$

Applicando alla (3) le condizioni di Rankine–Hugoinot, si trae

$$-\tilde{\lambda}\,[f^0] + [f] = 0 \tag{5}$$

dove con [ ] si è indicato l'urto e con $\tilde{\lambda}$ la sua velocità di avanzamento.

La (5), tenendo conto delle (4), conduce alle

$$\begin{cases} [wB] = 0 \\ [\rho w] = 0 \\ [\rho w^2 + A + \psi] = 0 \end{cases} \tag{6}$$

dove si è posto

$$w = -\tilde{\lambda} + v \tag{7}$$

e si è tenuto conto che

$$[\tilde{\lambda}] = 0 \quad , \quad [\rho w v] = [\rho w^2] . \tag{8}$$

La $(8)_2$ si dimostra applicando l'identità

$$[ab] = \tilde{a}\,[b] + \tilde{b}\,[a] \tag{9}$$

dove

$$(10)\qquad \begin{cases} \tilde{a} = \frac{1}{2}(a + a_0) \quad , \quad \tilde{b} = \frac{1}{2}(b + b_0) \\ [a] = a - a_0 \quad , \quad [b] = b - b_0 \,. \end{cases}$$

Le (6), invocando la (1) ed applicando la (9), si possono porre nella forma:

$$(11)\qquad \begin{cases} [w^2 \mathrm{A}] = 0 \\ [w^2 \rho^2] = 0 \\ [\rho w^2 + h - g/\rho] = 0 \,. \end{cases}$$

Dalle $(11)_1$ e $(11)_2$ segue che

$$\frac{[\mathrm{A}]}{\tilde{\mathrm{A}}} = \frac{[\rho^2]}{\tilde{\rho}^2}$$

e questa, tenendo conto delle identità

$$(12)\qquad \left[\frac{1}{\rho^2}\right] = -\frac{[\rho^2]}{\rho_0^2\,\rho^2} \quad , \quad \left(\widetilde{\frac{1}{\rho^2}}\right) = \frac{\tilde{\rho}^2}{\rho_0^2\,\rho^2} \,,$$

è riconducibile alla

$$(13)\qquad \left[\frac{\mathrm{A}}{\rho^2}\right] = 0 \,,$$

la quale esprime che attraverso una eventuale superficie d'urto l'invariante di Riemann A/ρ^2 è continuo. Ovviamente, la (13) ci consente di affermare che

$$(14)\qquad [g(\mathrm{A}/\rho^2)] = 0 \quad , \quad [h(\mathrm{A}/\rho^2)] = 0 \,.$$

È facile accertare che, dopo le (14) e (9), la $(11)_3$ si può trasformare nella:

$$(15)\qquad (\rho^2 w^2 - g)\left[\frac{1}{\rho}\right] = 0 \,.$$

Discutiamo, ora, la (15) nelle due ipotesi: $\left[\frac{1}{\rho}\right] = 0$ ed $\left[\frac{1}{\rho}\right] \neq 0$.

a) Se $\left[\frac{1}{\rho}\right] = 0$, allora la (15) è identicamente soddisfatta.

In tal caso, però, anche

$$(16)\qquad [\rho] = 0$$

e quindi da $(6)_2$, con una immediata applicazione della (9), si trae

$$(17)\qquad [w] = 0$$

oppure, essendo $[\mathring{\lambda}] = 0$,

$$[v] = 0. \tag{18}$$

Dopo la (17), dalla $(6)_1$ segue

$$[\mathrm{B}] = 0. \tag{19}$$

Le (16), (18) e (19) esprimono assenza di urti.

b) Se $\left[\frac{1}{\rho}\right] \neq 0$, allora dalla (15) si ottengono per le velocità di propagazione degli urti le seguenti determinazioni

$$w = \pm \frac{\sqrt{g}}{\rho}, \tag{20}$$

che coincidono con quelle già determinate in [1] per le velocità delle onde eccezionali. Possiamo, perciò, concludere che tutti gli urti sono caratteristici e, quindi, il sistema (2), completato con la (1), oltre ad essere completamente eccezionale è anche strettamente eccezionale.

N. 2. In questo numero ci proponiamo di determinare la legge di evoluzione temporale degli urti.

Com'è noto [3], indicando con σ il tempo lungo i raggi caratteristici l'equazione di evoluzione degli urti è suscettibile della forma

$$\boldsymbol{l} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}^0}{\mathrm{d}\sigma} = 0 \tag{21}$$

dove $\boldsymbol{l} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ va concepito come soluzione dell'equazione

$$\boldsymbol{l} \cdot (-\mathring{\lambda} \nabla_{\mathbf{U}} \boldsymbol{f}^0 + \nabla_{\mathbf{U}} \boldsymbol{f}) = 0 \tag{22}$$

essendo $\mathbf{U}$ il vettore di componenti (B, ρ, v).

Osserviamo che il vettore $\boldsymbol{l}$ può essere interpretato come autovettore sinistro della matrice $\nabla' \boldsymbol{f}$ dove $\nabla' = \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{f}^0}$.

Poiché

$$\nabla_{\mathbf{U}} \boldsymbol{f}^0 \equiv \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & v & \rho \end{matrix} \right\| , \quad \nabla_{\mathbf{U}} \boldsymbol{f} \equiv \left\| \begin{matrix} v & 0 & \mathrm{B} \\ 0 & v & \rho \\ \dfrac{\mathrm{B}}{\mu}(1 + \psi_{\mathrm{A}}) & v^2 + \psi_\rho & 2\rho v \end{matrix} \right\| \tag{23}$$

da (22) si ricava

$$\boldsymbol{l} \equiv \zeta \left(\frac{\mathrm{B}}{\mu}(1 + \psi_{\mathrm{A}}), wv + \psi_\rho, -w \right). \tag{24}$$

Dopo la (24) e la $(4)_1$, la (21) può essere posta nella forma

$$\frac{d}{d\sigma}(A + \psi) - \rho w \frac{dv}{d\sigma} = 0 . \tag{25}$$

D'altra parte, la $(6)_3$ tenendo presente anche la $(8)_2$, conduce alla

$$A + \psi = \alpha_0 - w\rho v \tag{26}$$

con

$$\alpha_0 = (w\rho v)_0 + A_0 + \psi_0 . \tag{27}$$

Allora, inserendo la (26) nella (25), si ottiene

$$\frac{d\alpha_0}{d\sigma} - 2\frac{d(\rho w v)}{d\sigma} + v\frac{d(\rho w)}{d\sigma} = 0 . \tag{28}$$

Dalla $(6)_2$, applicando la (9) ed osservando che valgono le identità

$$\left[\frac{1}{\rho}\right] = -\frac{[\rho]}{\rho\rho_0} \quad , \quad \frac{1}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{\rho\rho_0\left(\widetilde{\dfrac{1}{\rho}}\right)} , \tag{29}$$

si trae

$$[v] = \frac{\tilde{w}}{\left(\widetilde{\dfrac{1}{\rho}}\right)}\left[\frac{1}{\rho}\right] \tag{30}$$

e quindi

$$v = v_0 + [v] = v_0 + \frac{\tilde{w}}{\left(\widetilde{\dfrac{1}{\rho}}\right)}\left[\frac{1}{\rho}\right] . \tag{31}$$

Si ha anche identicamente che

$$w\rho v = (w\rho v)_0 + [\rho w^2] \tag{32}$$

essendo $[w\rho v] = [\rho w^2]$.

Inserendo le (31) e (32) nella (28), dopo la (20) e la $(14)_1$, si ottiene

$$2g\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{\rho}\right] + \frac{3}{2}\frac{dg}{d\sigma}\left[\frac{1}{\rho}\right] + \frac{d}{d\sigma}\{2(\rho w v)_0 - \alpha_0\} \mp v_0\frac{d\sqrt{g}}{d\sigma} = 0 . \tag{33}$$

Poiché, dopo la (20) e la (27)

$$2(\rho w v)_0 - \alpha_0 = \pm\sqrt{g}\, v_0 - (A_0 + \psi_0) , \tag{34}$$

alla (33) può essere data la forma definitiva

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{\rho}\right] + \frac{3}{4g}\frac{dg}{d\sigma}\left[\frac{1}{\rho}\right] = \varphi(\sigma) \tag{35}$$

dove si è posto

$$\varphi(\sigma) = \frac{1}{2g}\frac{d}{d\sigma}(A_0 + \psi_0) \mp \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{dv_0}{d\sigma}. \tag{36}$$

La (35) dà l'equazione differenziale a cui soddisfa l'urto $[1/\rho]$; la $\varphi(\sigma)$ è una funzione nota di σ per il tramite di g, che è continua attraverso la superficie d'urto, e delle derivate prime rispetto a σ dei valori iniziali A_0, ψ_0, v_0 delle quantità A, ψ, v.

L'integrale generale dell'equazione lineare (35) è dato da

$$\left[\frac{1}{\rho}\right] = g^{-3/4}\left(C + \int \varphi(\sigma)\, g^{3/4}\, d\sigma\right), \tag{37}$$

dove C è una costante arbitraria.

La (37) rappresenta, evidentemente, la legge di evoluzione temporale dell'urto $[1/\rho]$.

Passiamo, infine, al calcolo effettivo delle leggi di evoluzione di $[v]$ e $[B]$.

Si nota facilmente che la (30), dopo la (20), è suscettibile della forma

$$[v] = \pm\sqrt{g}\left[\frac{1}{\rho}\right]. \tag{38}$$

La (38), dopo la (37), fornisce per l'urto $[v]$ la seguente legge di evoluzione

$$[v] = \pm g^{-1/4}\left(C + \int \varphi(\sigma)\, g^{3/4}\, d\sigma\right). \tag{39}$$

Infine, per calcolare l'evoluzione temporale di $[B]$, ricorriamo alla $(6)_1$. Da questa con semplici manipolazioni si trae

$$[B] = -\frac{\tilde{B}}{\pm\sqrt{g}\left(\widetilde{\frac{1}{\rho}}\right)}[v], \tag{40}$$

da cui, dopo la (38) e dopo le identità

$$\begin{cases} \tilde{B} = \dfrac{1}{2}\{[B] + 2B_0\} \\ \left(\widetilde{\dfrac{1}{\rho}}\right) = \dfrac{1}{2}\left\{\left[\dfrac{1}{\rho}\right] + \dfrac{2}{\rho_0}\right\}, \end{cases} \tag{41}$$

segue

$$[B] = \frac{B_0}{\left[\dfrac{1}{\rho}\right] + \dfrac{1}{\rho_0}}\left[\frac{1}{\rho}\right], \tag{42}$$

da cui, dopo la (37), si ottiene per l'urto [B] la seguente legge di evoluzione

$$[B] = -B_0 \frac{C + \int \varphi(\sigma) g^{3/4} d\sigma}{C + \frac{g^{3/4}}{\rho_0} + \int \varphi(\sigma) g^{3/4} d\sigma} . \tag{43}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] G. CRUPI (1976) – « Rend. Acc. Naz. Lincei » (in corso di stampa).
[2] G. CRUPI (1961) « Rend. Ist. Lom. Sc. », A, 95, 199–214.
[3] G. BOILLAT (1972) – « C.R. Acad. Sc. Paris », *274*, 1018; (1972) – « C.R. Acad. Sc. Paris », *275*, 1255.
[4] G. BOILLAT (1974) – « Phys. Letters », ser. A, *60* (5), 357–358.