Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Andrea Donato

Legge di conservazione supplementare per un particolare sistema iperbolico del primo ordine

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.3-4, p. 247–252.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_3-4_247_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Fisica matematica. — *Legge di conservazione supplementare per un particolare sistema iperbolico del primo ordine* (*). Nota (**) di ANDREA DONATO (***), presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — We consider a hyperbolic system of first order obtained by reducing a conservative hyperbolic equation of second order in noncanonical form. We determine, generalizing a previous paper [1], the conditions for having a supplementary conservation law. As a particular case we obtain that the second order equation must be of Euler type with the usual conservation law for the energy.

In una precedente Nota lincea [1], seguendo un procedimento dovuto a G. Boillat [2], ho stabilito, tra l'altro, una classe di equazioni iperboliche conservative del secondo ordine in forma canonica che ammettono una legge di conservazione supplementare.

In questa Nota mi sono proposto di completare l'indagine considerando il caso più generale delle equazioni conservative del secondo ordine non ridotte a forma canonica del tipo (1):

$$\partial_t \mathrm{F}(\mathrm{U}_t , \mathrm{U}_i) + \partial_i \mathrm{F}^i(\mathrm{U}_t , \mathrm{U}_i) = 0 \qquad (i = 1 , 2 , 3) . \tag{1}$$

Dopo aver effettuato, con un opportuno cambio di variabili, la riduzione dell'equazione (1) ad un sistema del primo ordine si vede che, assegnando *apriori* la funzione $\mathscr{L}(\mathrm{U}_t , \mathrm{U}_i)$, il cui gradiente rispetto alle variabili U_i fornisce F^i, e le funzioni della sola U_t, ψ, φ e ψ^i $(i = 1 , 2 , 3)$, che si ottengono da integrazioni, resta completamente determinata la classe delle equazioni del tipo (1) che ammettono una legge di conservazione supplementare. Inoltre, utilizzando le stesse funzioni arbitrarie, si dà la forma esplicita della legge supplementare di conservazione. Nel caso particolare in cui $\psi(\mathrm{U}_t) = \mathrm{U}_t$ e si considerano costanti ψ^i e φ la funzione $\mathscr{L}(\mathrm{U}_t , \mathrm{U}_i)$ diventa una lagrangiana; così l'equazione del secondo ordine coincide con quella di Eulero e la legge di conservazione si particolarizza in quella usuale dell'energia.

1. L'equazione (1), effettuando la trasformazione di variabili

$$\Phi = \mathrm{F}(\mathrm{U}_t , \mathrm{U}_i) \quad , \quad v_i = \mathrm{U}_i \tag{2}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei contratti di Ricerca del C.N.R. Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica.

(**) Pervenuta all'Accademia il 7 settembre 1976.

(***) Istituto Matematico dell'Università di Messina.

(1) $\mathrm{U}_t = \partial_t \mathrm{U}$ e $\mathrm{U}_i = \partial_i \mathrm{U}$ denotano, rispettivamente, le derivate rispetto al tempo e alle variabili spaziali x_i $(i = 1 , 2 , 3)$.

e tenendo conto delle relazioni

$$\partial U_t/\partial\Phi = (\partial F/\partial U_t)^{-1} = \rho \quad , \quad \partial U_t/\partial v_j = -\rho\,\partial F/\partial U_j = -\rho\alpha_j \tag{3}$$

$$\partial/\partial\Phi = \rho\,\partial/\partial U_t \quad , \quad \partial/\partial v_j = -\rho\alpha_j\,\partial/\partial U_t + \partial/\partial U_j\,, \tag{4}$$

può essere scritta sotto forma di un sistema iperbolico quasi lineare del primo ordine del tipo [2]

$$\boldsymbol{u}_t + A^i(\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}_i = 0 \qquad (i = 1\,,2\,,3) \tag{5}$$

con

$$\boldsymbol{u} = \begin{Vmatrix} \Phi \\ v_j \end{Vmatrix} \qquad A^i = \begin{Vmatrix} a^i & -a^i\alpha_j + b^i_j \\ -\rho\delta^i_k & \rho\alpha_j\,\delta^i_k \end{Vmatrix} \tag{6}$$

$$a^i = \partial F^i/\partial U_t \quad , \quad b^i_j = \partial F^i/\partial U_j\,. \tag{7}$$

Ovviamente, il sistema (5) può essere posto sotto forma conservativa in quanto A^i si può esprimere come un gradiente cioè:

$$A^i = \nabla \boldsymbol{f}^i \quad ; \quad \nabla = (\partial/\partial\Phi\,,\partial/\partial v_j) \quad ; \quad \boldsymbol{f}^i = \begin{Vmatrix} F^i \\ -\delta^i_k\,U_t \end{Vmatrix} \tag{8}$$

essendo $F^i = F^i(U_t(\Phi\,,v_j)\,,v_j)$.

Siccome il sistema (5) è iperbolico la matrice $A_n = A^i n_i$, che è quadrata di ordine 4, deve avere gli autovalori reali ed i corrispondenti 4 autovettori, destri e sinistri, devono essere linearmente indipendenti. Ciò che ci proponiamo di indagare è sapere se il sistema (5) ammette una legge supplementare di conservazione con densità di energia convessa del tipo

$$\partial_t h + \partial_i h^i = 0\,. \tag{9}$$

Com'e noto [1], [2], se D indica la matrice le cui colonne sono formate con i vettori destri di A_n, una condizione necessaria e sufficiente affinché la (9) esista è che

$$(D\check{D})^{-1} = H(\boldsymbol{u}) \tag{10}$$

risulti indipendente da $\boldsymbol{n}$. Nella (10) ˇ indica l'operatore di trasposizione ed **H** una matrice quadrata simmetrica e definita positiva. Tale risultato ottenuto da G. Boillat in [2] vale in generale per i sistemi quasi lineari del primo ordine di tipo iperbolico in uno spazio a un numero qualunque di dimensioni. Le quantità h ed h^i che compaiono nella (9) sono date da

$$H = \check{\nabla}\nabla h \tag{11}$$

$$h^i = \nabla h \boldsymbol{f}^i - g^i \tag{12}$$

$$\nabla g^i = \boldsymbol{f}^i H\,. \tag{13}$$

(2) Osserviamo subito che per ritenere il sistema (5) equivalente alla equazione (1) bisogna imporre l'ulteriore vincolo $\partial_i v_j = \partial_j v_i$.

2. Allo scopo di costruire la matrice H ($\boldsymbol{u}$) che compare nella (10) cominciamo col determinare gli autovalori e gli autovettori destri della matrice A_n che, dopo la (6), risulta definita da

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{A}^i n_i = \begin{Vmatrix} a_n & -\rho a_n \alpha + \boldsymbol{b}_n \\ -\rho \boldsymbol{n} & \rho \boldsymbol{n} \otimes \alpha \end{Vmatrix} \tag{14}$$

dove $\boldsymbol{b}_n \equiv (b^i_j n_i)$, $a_n = a^i n_i$ e $\otimes$ rappresenta il prodotto tensoriale. Dopo facili calcoli si ottengono le seguenti determinazioni per gli autovalori di A_n

$$\lambda^{(0)} = 0 \quad ; \quad \lambda^{(\pm)} = \frac{(\alpha_n + a_n) \pm \sqrt{\rho^2 (\alpha_n + a_n)^2 - 4 \rho\, b_{nn}}}{2} \quad ; \quad b_{nn} = \boldsymbol{b}_n \cdot \boldsymbol{n}. \tag{15}$$

In corrispondenza alla radice doppia $\lambda = 0$ si hanno i seguenti due autovettori destri

$$\boldsymbol{d}_1^{(0)} = \begin{Vmatrix} \alpha \cdot \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{w}_1 \end{Vmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{d}_2^{(0)} = \begin{Vmatrix} \alpha \cdot \boldsymbol{w}_2 \\ \boldsymbol{w}_2 \end{Vmatrix} \tag{16}$$

con [3] $\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{b}_n = 0$, $\boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{b}_n = 0$ e $\boldsymbol{w}_1 \wedge \boldsymbol{w}_2 \neq 0$, mentre, in corrispondenza a $\lambda = \lambda^{(+)}$ e $\lambda = \lambda^{(-)}$ si trova, rispettivamente

$$\boldsymbol{d}_3^{(+)} = k_1 \begin{Vmatrix} \mu_1 \gamma_{nn} \\ \boldsymbol{n} \end{Vmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{d}_4^{(-)} = k_2 \begin{Vmatrix} \mu_2 \gamma_{nn} \\ \boldsymbol{n} \end{Vmatrix} \tag{17}$$

dove k_1 e k_2 sono due parametri arbitrari e valgono le posizioni:

$$\mu_1 = (\lambda^{(+)} - \rho a_n)^{-1} \;, \quad \mu_2 = (\lambda^{(-)} - \rho a_n)^{-1} \;, \quad \gamma_{nn} = b_{nn} - \rho a_n \alpha_n \,. \tag{18}$$

In virtù della relazione

$$\mathrm{D}\check{\mathrm{D}} = \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{d}_i \check{\boldsymbol{d}}_i \tag{19}$$

tenendo conto di (16) e (17), nel caso in esame, si trova

$$\mathrm{D}\check{\mathrm{D}} = \begin{Vmatrix} p^2 & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{t} & \mathrm{T} \end{Vmatrix} \tag{20}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} p^2 &= (\mu_1^2 k_1^2 + \mu_2^2 k_2^2)\, \gamma_{nn}^2 + (\alpha \cdot \boldsymbol{w}_1)^2 + (\alpha \cdot \boldsymbol{w}_2)^2 \\ \boldsymbol{t} &= (\mu_1 k_1^2 + \mu_2 k_2^2)\, \gamma_{nn}\, \boldsymbol{n} + (\alpha \cdot \boldsymbol{w}_1)\, \boldsymbol{w}_1 + (\alpha \cdot \boldsymbol{w}_2)\, \boldsymbol{w}_2 \\ \mathrm{T} &= (k_1^2 + k_2^2)\, \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} + \boldsymbol{w}_1 \otimes \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \otimes \boldsymbol{w}_2 \,. \end{aligned} \tag{21}$$

Per imporre la condizione che $\mathrm{D}\check{\mathrm{D}}$ risulti indipendente da $\boldsymbol{n}$ basta richiedere che le quantità p^2, $\boldsymbol{t}$ e T, definite dalle (21), risultino funzioni della sola

(3) $\circ$ e $\wedge$ indicano, rispettivamente, il prodotto scalare e quello vettoriale.

variabile $\boldsymbol{u}$. Dopo tale richiesta, moltiplicando la $(21)_3$ per a e sottraendo la $(21)_2$ si ottiene

$$\mathrm{T}a - \boldsymbol{t} = \{(k_1^2 + k_2^2)\,\alpha_n - (\mu_1 k_1^2 + \mu_2 k_2^2)\,\gamma_{nn}\}\,\boldsymbol{n} \tag{22}$$

e dovendo essere il primo membro indipendente da $\boldsymbol{n}$ vale la condizione

$$(\alpha_n - \mu_1 \gamma_{nn})\,k_1^2 + (\alpha_n - \mu_2 \gamma_{nn})\,k_2^2 = 0\,. \tag{23}$$

Inoltre, moltiplicando la $(21)_3$ a destra e a sinistra per a e sottraendo la $(21)_1$, si ottiene

$$a\mathrm{T}a - p^2 = (\alpha_n^2 - \mu_1^2 \gamma_{nn})\,k_1^2 + (\alpha_n^2 - \mu_2^2 \gamma_{nn}^2)\,k_2^2\,. \tag{24}$$

La (23) ci consente di esprimere la $\boldsymbol{t}$ nella forma

$$\boldsymbol{t} = \mathrm{T}a \tag{25}$$

mentre dalle (23) e (24) si ottiene

$$k_1^2 + k_2^2 = \frac{\rho\,(a\mathrm{T}a - p^2)}{b_{nn}} \tag{26}$$

in quanto $\mu_1 \mu_2 = 1/\rho\gamma_{nn}$. Dopo la (25) la matrice $\mathrm{D}\check{\mathrm{D}}$, fornita dalla (20), diventa

$$\mathrm{D}\check{\mathrm{D}} = \begin{Vmatrix} p^2 & \mathrm{T}a \\ \mathrm{T}a & \mathrm{T} \end{Vmatrix}. \tag{27}$$

Per costruire la sua inversa cominciamo con l'osservare che la $(21)_3$ moltiplicata per $\boldsymbol{b}_n$ dopo la (26) fornisce

$$\mathrm{T}\boldsymbol{b}_n = \rho\,(a\mathrm{T}a - p^2)\,\boldsymbol{n} \tag{28}$$

che dovendo valere per ogni $\boldsymbol{n}$ comporta

$$\mathrm{TB} = (a\mathrm{T}a - p^2)\,\mathrm{I} \quad , \quad \mathrm{B} = \| b_k^i \|\ \mathrm{I} = \| \delta_k^i \|\,. \tag{29}$$

dopo la (29), tenendo conto della (25), si trova agevolmente la seguente espressione per $(\mathrm{D}\check{\mathrm{D}})^{-1}$:

$$(\mathrm{D}\check{\mathrm{D}})^{-1} = \pi \begin{Vmatrix} 1 & -a \\ -a & a\otimes a - \dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{B} \end{Vmatrix} \quad ; \quad 1/\pi = p^2 - a\mathrm{T}a\,. \tag{30}$$

3. Le relazioni (10) e (11), dopo la (30), si traducono nel seguente sistema differenziale per la h:

$$\begin{cases} \partial^2 h/\partial\Phi^2 = \pi \\ \partial^2 h/\partial\Phi\,\partial v_i = -\pi\alpha_i \\ \partial^2 h/\partial v_i\,\partial v_k = \pi\left\{\alpha_i\,\alpha_k - a^i\,\alpha_k - \dfrac{1}{\rho}\,b_k^i\right\}. \end{cases} \tag{31}$$

Il sistema (31) scritto nelle variabili originarie U_t e U_i, tenendo conto delle (3) e (4), si presenta sotto la forma

$$(32)\qquad \begin{cases} \partial/\partial U_t\,(\rho\partial h/\partial U_t) = \pi/\rho \\ \partial/\partial U_i\,(\rho\partial h/\partial U_t) = 0 \\ \partial/\partial U_k\,(\partial h/\partial U_i - \rho\partial h/\partial U_t\cdot\partial F/\partial U_i) = -\,\partial/\partial U_k\,(F_i\,\pi/\rho)\,. \end{cases}$$

dalla $(32)_2$ segue subito che deve essere

$$(33)\qquad \rho\partial h/\partial U_t = \psi\,(U_t)$$

quindi, dalla $(32)_1$ si ottiene

$$(34)\qquad \pi/\rho = \psi'\,(U_t)\,.$$

Integrando la $(32)_3$ e tenendo conto di (33) e (34) si ha

$$(35)\qquad \psi'\,F^i = \psi\partial F/\partial U_i - \partial h/\partial U_i + \psi^i\,(U_t)\,.$$

Inoltre, dovendo essere per ragioni di simmetria $\partial F^i/\partial U_k - \partial F^k/\partial U_i = 0$, segue l'esistenza di una funzione $\mathscr{L}\,(U_t\,, U_i)$ tale che

$$(36)\qquad \psi'\,F^i = \partial\mathscr{L}/\partial U_i\,.$$

Inserendo la (36) nella (35) e integrando si ottiene

$$(37)\qquad \mathscr{L} = \psi F - h + \psi^i\,U_i + \varphi\,(U_t)\,.$$

Allo scopo di determinare h^i cominciamo a scrivere il sistema differenziale cui soddisfa g^i indicato nella formula (13) che dopo la (8) e la (30) diventa

$$(38)\qquad \begin{cases} \partial g^i/\partial\Phi = \pi\,\{F^i + U_t\,\alpha_i\} \\ \partial g^i/\partial v_k = \pi\left\{-\,F^i\,\alpha_k + U_t\left(\dfrac{1}{\rho}\,b^i_k + a^i\,\alpha_k - \alpha_i\,\alpha_k\right)\right. \end{cases}$$

tenendo presenti le (3) e (4), nelle variabili originarie si ha

$$(39)\qquad \partial g^i/\partial U_k = U_t\,\partial\,(\psi'\,F^i)/\partial U_k$$

che integrata dopo aver tenuto conto di (33), (34) e (35) fornisce:

$$(40)\qquad g^i = U_t\,(\psi\partial F/\partial U_i - \partial h/\partial U_i) + \int \psi'\,\psi^i\,(U_t)\,dU_t\,.$$

Infine, tenendo conto dell'espressione di $\boldsymbol{f}^i$ fornita dalla (8), si trova

$$(41)\qquad \nabla h\,\boldsymbol{f}^i = \partial h/\partial\Phi\,F^i - U_t\,\partial h/\partial v_i\,.$$

Scrivendo la (39) nelle variabili U_t ed U_i, ricordando la (12) dopo la (40) si ottiene

$$(42)\qquad h^i = \psi F^i - \int \psi'\,\psi^i\,dU_t\,.$$

Osserviamo che la derivata di $\mathscr{L}$ rispetto a U_t, dopo la (37) è data da:

$$\partial\mathscr{L}/\partial U_t = \psi' F + \psi^{i\prime} U_i + \varphi' , \tag{43}$$

possiamo, in definitiva, affermare che assegnata la funzione $\mathscr{L}(U_t, U_i)$ e fissate le funzioni arbitrarie $\psi(U_t)$, $\psi^i(U_t)$ e $\varphi(U_i)$ restano determinate la equazione di campo (1) e la legge di conservazione supplementare (9) che, dopo (35), (37), (42) e (43) diventano:

$$\partial_t\left\{\frac{1}{\psi'}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial U_t} - \psi^{i\prime} U_i - \varphi'\right)\right\} + \partial_i\left\{\frac{1}{\psi'}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial U_i}\right\} = 0 \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\left\{\frac{\psi}{\psi'}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial U_t} - \mathscr{L} - \frac{\psi^2}{\psi'}\left[U_i\left(\frac{\psi^i}{\psi}\right)' + \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'\right]\right\} + \\ + \partial_i\left\{\frac{\psi}{\psi'}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial U_i} - \int \psi' \psi^i \, dU_t\right\} = 0 .\end{aligned} \tag{45}$$

Nel caso particolare in cui $\psi = U_t$, $\psi^i = \text{cost.}$ e $\varphi = \text{cost.}$, le equazioni (44) e (45) si particolarizzano nella equazione di Eulero derivante da una lagrangiana $\mathscr{L}$ con la legge usuale di conservazione dell'energia:

$$\partial_t(\mathscr{L}_{U_t}) + \partial_i(\mathscr{L}_{U_i}) = 0 \tag{46}$$

$$\partial_t(U_t\mathscr{L}_{U_t} - \mathscr{L}) + \partial_i(U_t\mathscr{L}_{U_i}) = 0 . \tag{47}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. DONATO (1974) – *On supplementary conservation laws for second order hyperbolic conservative equation*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 57, 380–386.

[2] G. BOILLAT (1974) – *Sur l'existence et la recherche d'equations de conservation supplémentaires pour les systémes hyperboliques*, «Comptes Rendus», *278*, sér. A 909.