Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Vergara Caffarelli

Un problema di disequazioni variazionali per un sistema di equazioni differenziali del tipo dell'elasticità

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.3-4, p. 177–182.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_3-4_177_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Analisi matematica. — *Un problema di disequazioni variazionali per un sistema di equazioni differenziali del tipo dell'elasticità* (*). Nota (**) di GIORGIO VERGARA CAFFARELLI, presentata dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — We consider a variational inequality related to the elasticity operator. The solution of this problem may be approximated by special variational inequalities connected with finite dimensional subspaces. A dual problem is also considered.

Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un aperto limitato con frontiera localmente lipschitziana. Indichiamo con $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\Omega)$ lo spazio di Hilbert dei vettori $u(x) \equiv \{u_\alpha(x)\}$ $\alpha = 1, \cdots, n$, di componenti $u_\alpha \in H_0^1(\Omega)$ col prodotto scalare

$$(u, v) = \sum_{\alpha=1}^{n} \int_\Omega u_\alpha v_\alpha \, dx + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \int_\Omega D_\beta u_\alpha D_\beta v_\alpha \, dx$$

e con la norma associata $\| u \|^2 = (u, u)$.

Se $u \in \mathcal{H}$, indichiamo con $\nabla u \equiv \{u_{\alpha,\beta}(x)\}$ il tensore gradiente di componenti $u_{\alpha,\beta} = D_\beta u_\alpha$.

Ricordiamo che detto $\mathbf{L}$ lo spazio euclideo dei tensori del secondo ordine di $\mathbf{R}^n$, se $V \equiv \{V_{\alpha\beta}\}$, $W \equiv \{W_{\alpha\beta}\}$ $\alpha, \beta = 1, \cdots, n$, sono in $\mathbf{L}$, il prodotto scalare $V \cdot W$ e la lunghezza $|V|$ si definiscono nel seguente modo

$$V \cdot W = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} V_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} \quad , \quad |V|^2 = V \cdot V ;$$

e che, ad un tensore $\mathbf{C} \equiv \{\mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \cdots, n$, del quarto ordine su $\mathbf{R}^n$, si può associare la trasformazione lineare di $\mathbf{L}$ in se definita ponendo:

$$W = \mathbf{C}V \qquad \text{se} \quad W_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta=1}^{n} \mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\gamma\delta} \qquad \alpha, \beta = 1, \cdots, n.$$

Assegnato in Ω un campo di tensori del quarto ordine $\mathbf{C}(x) \equiv \{\mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}(x)\}$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \cdots, n$, le cui componenti $\mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} \in L^\infty(\Omega)$ verifichino quasi ovunque le condizioni di simmetria « minore »

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathbf{C}_{\beta\alpha\gamma\delta} \quad ; \quad \mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathbf{C}_{\alpha\beta\delta\gamma} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \cdots, n,$$

consideriamo la forma bilineare su $\mathcal{H}$ definita ponendo:

$$a(u, v) = \int_\Omega \mathbf{C} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{n} \int_\Omega \mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma,\delta} v_{\alpha,\beta} \, dx.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1976.

Tale forma è continua su $\mathcal{H}$, ovvero esiste una costante $M > 0$ tale che

$$a(u, v) \leq M \| u \| \| v \| \qquad \forall u, v \in \mathcal{H}. \tag{1}$$

Se supponiamo esista una costante $\mu > 0$ tale che, per ogni tensore doppio simmetrico V si abbia

$$\mathbf{C}V \cdot V \geq \mu |V|^2 \qquad \text{q.o. in } \Omega,$$

dalla diseguaglianza di Korn segue che la forma bilineare $a(u, v)$ è coercitiva su $\mathcal{H}$ ovvero esiste una costante $\nu > 0$ tale che

$$a(v, v) \geq \nu \| v \|^2 \qquad \forall v \in \mathcal{H}. \tag{2}$$

Sia $W(x)$ un campo di tensori del secondo ordine assegnato in Ω di componenti $W_{\alpha\beta} \in L^2(\Omega)$ $\alpha, \beta, = 1, \cdots, n$, e sia

$$\mathcal{K} = \{v \in \mathcal{H} ; W \cdot \nabla v \geq 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega\}$$

il cono convesso di $\mathcal{H}$ di vertice l'origine individuato da W, che, per non cadere in casi banali, possiamo supporre diverso da $\mathcal{H}$ e da $\{0\}$.

Assegnato un vettore $f \in \mathcal{H}$ consideriamo il problema di disequazioni variazionali

(**P**) *Determinare* $u \in \mathcal{K}$ *in modo che*

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \qquad \forall v \in \mathcal{K}.$$

Poiché, come è facile verificare, il convesso $\mathcal{K}$ è chiuso in $\mathcal{H}$, è ben noto che nell'ipotesi di coercitività (2) esiste ed è unico un vettore $u \in \mathcal{K}$ soluzione del problema (**P**) ([2]).

Vogliamo dimostrare che la soluzione del problema (**P**) si può ottenere come limite forte in $\mathcal{H}$ di soluzioni di disequazioni variazionali relative a coni convessi contenuti in sottospazi di $\mathcal{H}$ aventi dimensione finita e che in tal modo resta naturalmente associato a (**P**) un problema di disequazioni variazionali ad esso equivalente.

Sia $\{B_i\}$, $i \in \mathbf{N}$, $B_i \subset \mathbf{R}^n$, una successione costituita da tutte le sfere di $\mathbf{R}^n$ aventi raggio e coordinate del centro razionali e intersezione con Ω non vuota. Detto Ω_i l'insieme $\Omega \cap B_i$ indichiamo con $\psi^{(i)}$, $i \in \mathbf{N}$, la funzione caratteristica di Ω_i. È ben noto che

LEMMA. *Sia* $\varphi \in L^1(\Omega)$. *Allora risulta* $\varphi \geq 0$ *quasi ovunque in* Ω *se e solo se*

$$\int_\Omega \psi^{(i)} \varphi \, dx \equiv \int_{\Omega_i} \varphi \, dx \geq 0 \qquad \forall i \in \mathbf{N}$$

essendo $\psi^{(i)}$ *e* Ω_i, $i \in \mathbf{N}$, *le funzioni e gli insiemi sopra definiti.*

Indichiamo con $\mathcal{K}_m \subset \mathcal{H}$ il cono convesso chiuso di vertice l'origine

$$\mathcal{K}_m = \left\{ v \in \mathcal{H} \quad ; \quad \int_\Omega \psi^{(i)}\, \mathrm{W}\cdot\nabla v \, dx \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, m \right\}.$$

Ovviamente

$$\mathcal{K} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_m .$$

Consideriamo il problema di disequazioni variazionali

($\mathbf{P}_m$) *Determinare* $u^{(m)} \in \mathcal{K}_m$ *in modo che*

$$a\,(u^{(m)}, v^{(m)} - u^{(m)}) \geq (f, v^{(m)} - u^{(m)}) \qquad \forall v^{(m)} \in \mathcal{K}_m .$$

Poiché $a(\cdot, \cdot)$ è coercitiva, il problema ($\mathbf{P}_m$) ammette una ed una sola soluzione $u^{(m)} \in \mathcal{K}_m$.

PROPOSIZIONE. *Per ogni* $m \in \mathbf{N}$ *il problema* ($\mathbf{P}_m$) *è equivalente ad un problema di disequazioni variazionali relativo ad un cono convesso* $\tilde{\mathcal{K}}_m$ *contenuto in un sottospazio di* $\mathcal{H}$ *avente dimensione finita.*

Dimostrazione. Infatti, indicati con $z^{(i)}$ $i \in \mathbf{N}$, i vettori di $\mathcal{H}$ tali che

$$(z^{(i)}, v) = \int_\Omega \psi^{(i)}\, \mathrm{W}\cdot\nabla v \, dx \qquad \forall v \in \mathcal{H}$$

risulta

$$\mathcal{K}_m = \{ v \in \mathcal{H} \; ; (z^{(i)}, v) \geq 0 \quad i = 1, \cdots, m \}. \tag{3}$$

Inoltre detto $\mathrm{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ l'operatore lineare invertibile associato alla forma $a(\cdot , \cdot)$ definito ponendo

$$(\mathrm{A}u, v) = a(u, v) \qquad \forall u, v \in \mathcal{H}$$

il problema ($\mathbf{P}_m$) può scriversi nella forma:

Determinare $u^{(m)} \in \mathcal{K}_m$ *in modo che*

$$(\mathrm{A}u^{(m)} - f, v^{(m)} - u^{(m)}) \geq 0 \qquad \forall v^{(m)} \in \mathcal{K}_m . \tag{4}$$

Assumendo nella (4) $v^{(m)} = 0 \in \mathcal{K}_m$ e $v^{(m)} = 2\, u^{(m)} \in \mathcal{K}_m$ si deduce che il problema ($\mathbf{P}_m$) è equivalente a determinare $u^{(m)}$ in modo che

$$u^{(m)} \in \mathcal{K}_m \tag{5}$$

$$(\mathrm{A}u^{(m)} - f, u^{(m)}) = 0 \tag{6}$$

$$(\mathrm{A}u^{(m)} - f, v^{(m)}) \geq 0 \qquad \forall v^{(m)} \in \mathcal{K}_m . \tag{7}$$

Ciò implica che o $Au^{(m)} - f = 0$ oppure che l'iperpiano

$$\{h \in \mathcal{H} \; ; \; (Au^{(m)} - f \, , h) = 0\}$$

è uno degli iperpiani supporto in $u^{(m)}$ al cono convesso $\mathcal{K}_m$, e quindi esistono delle costanti $\lambda_i^{(m)} \geq 0$ $i = 1, \cdots, m$, tali che

$$Au^{(m)} - f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(m)} z^{(i)} \quad ; \quad \lambda_i^{(m)} \geq 0. \tag{8}$$

Pertanto $u^{(m)}$ appartiene al sottospazio $\mathcal{V}_m$ di $\mathcal{H}$ generato dai vettori $A^{-1}f, A^{-1}z^{(1)}, \cdots, A^{-1}z^{(m)}$ e quindi, per l'unicità della soluzione, coincide con la soluzione della disequazione variazionale $a(\tilde{u}^{(m)}, \tilde{v}^{(m)} - \tilde{u}^{(m)}) \geq$ $\geq (f, \tilde{v}^{(m)} - \tilde{u}^{(m)})$ relativa al cono convesso $\tilde{\mathcal{K}}_m = \mathcal{V}_m \cap \mathcal{K}_m$.

Indichiamo ora con $\mathcal{K}_m^* \subset \mathcal{H}$ il cono convesso chiuso di vertice l'origine generato dai vettori $z^{(i)}$, $i = 1, \cdots, m$,

$$\mathcal{K}_m^* = \left\{ s \in \mathcal{H} \; ; \; s = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i z^{(i)} \, , \sigma_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, m \right\},$$

con $g \in \mathcal{H}$ la soluzione del problema

$$a(g, v) = (f, v) \qquad \forall v \in \mathcal{H} \tag{9}$$

e con $a^{-1}(u, v)$ la forma bilineare su $\mathcal{H}$ associata all'operatore A^{-1}

$$a^{-1}(u, v) = (A^{-1} u, v) \qquad \forall u, v \in \mathcal{H}$$

e consideriamo il problema di disequazioni variazionali

($\mathbf{P}_m^*$) *Determinare* $r^{(m)} \in \mathcal{K}_m^*$ *in modo che*

$$a^{-1}(r^{(m)}, s^{(m)} - r^{(m)}) \geq -(g, s^{(m)} - r^{(m)}) \qquad \forall s^{(m)} \in \mathcal{K}_m^*.$$

Il problema ($\mathbf{P}_m^*$) ammette una ed una sola soluzione $r^{(m)} \in \mathcal{K}_m^*$ poiché posto $s = Av$, da (1) si ha

$$\| s \| \leq M \| v \|$$

e quindi

$$a^{-1}(s, s) = a(v, v) \geq \frac{\nu}{M^2} \| s \|^2.$$

PROPOSIZIONE. *Per le soluzioni* $u^{(m)}$ *ed* $r^{(m)}$ *dei problemi* ($\mathbf{P}_m$) *e* ($\mathbf{P}_m^*$) *risulta*

$$r^{(m)} = Au^{(m)} - f \qquad \textit{ovvero} \qquad u^{(m)} = A^{-1} r^{(m)} + g.$$

Dimostrazione. Posto $r^{(m)} = Au^{(m)} - f$ per la (8) $r^{(m)} \in \mathcal{K}_m^*$. Inoltre dalla definizione dei coni convessi $\mathcal{K}_m$ e $\mathcal{K}_m^*$ si trae che

$$(u^{(m)}, s^{(m)}) \geq 0 \qquad \forall s^{(m)} \in \mathcal{K}_m^*$$

e quindi, per la (6) si conclude che

$$(u^{(m)}, s^{(m)} - r^{(m)}) \geq 0 \qquad \forall s^{(m)} \in \mathcal{K}_m^*$$

ovvero

$$(A^{-1} r^{(m)} + g, s^{(m)} - r^{(m)}) \geq 0 \qquad \forall s^{(m)} \in \mathcal{K}_m^*.$$

Indicato con $\mathcal{K}^*$ il cono convesso chiuso

$$\mathcal{K}^* = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_m^*}$$

consideriamo il problema

(P*) *Determinare* $r \in \mathcal{K}^*$ *in modo che*

$$a^{-1}(r, s - r) \geq -(g, s - r) \qquad \forall s \in \mathcal{K}^*.$$

TEOREMA. *La successione* $\{u^{(m)}\}$ *delle soluzioni dei problemi* $(\mathbf{P}_m)$ *converge fortemente in* $\mathcal{H}$ *alla soluzione* u *del problema* **(P)** *e la successione* $\{r^{(m)}\}$ *delle soluzioni dei problemi* $(\mathbf{P}_m^*)$ *converge fortemente alla soluzione* r *del problema* **(P*)**.

Inoltre

$$Au = f + r$$

e quindi la soluzione r *del problema* **(P*)** *si può interpretare come la «reazione» del «vincolo unilaterale» espresso dalla condizione* $W \cdot \nabla u \geq 0$ q.o. *in* Ω.

Dimostrazione. La convergenza delle successioni $\{u^{(m)}\}, \{r^{(m)}\}$ è una conseguenza della monotonia delle due successioni di convessi chiusi ([1]):

$$\mathcal{K}_m \downarrow \mathcal{K} \quad , \quad \mathcal{K}_m^* \uparrow \mathcal{K}^*.$$

Ne diamo per completezza la dimostrazione. Da (6) e da (2) segue che

$$\nu \| u^{(m)} \|^2 \leq (Au^{(m)}, u^{(m)}) = (f, u^{(m)}) \leq \|f\| \| u^{(m)} \|,$$

pertanto la successione $\{u^{(m)}\}$ è limitata in $\mathcal{H}$ e quindi da essa si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente.

Poiché per il lemma di Minty il problema $(\mathbf{P}_m)$ è equivalente a determinare $u^{(m)} \in \mathcal{K}_m$ in modo che

$$(Av^{(m)} - f, v^{(m)} - u^{(m)}) \geq 0 \qquad \forall v^{(m)} \in \mathcal{K}_m$$

scelto $v^{(m)} = v \in \mathcal{K} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_m$, si conclude che una qualunque sottosuccessione debolmente convergente, estratta dalla $\{u^{(m)}\}$, converge alla soluzione del problema

$$u \in \mathcal{K}; (Av - f, v - u) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{K},$$

il quale, ancora per il lemma di Minty, è equivalente al problema (**P**). Pertanto

$$u^{(m)} \rightarrow u \qquad \text{debolmente in } \mathscr{H}. \tag{11}$$

Osserviamo ora che dalla disequazione variazionale ($\mathbf{P}_m$) posto $v^{(m)} = u \in \mathscr{K}$ si ha

$$(\mathrm{A}u^{(m)} - f, u^{(m)} - u) \leq 0$$

ed inoltre, da (11),

$$\lim_{m\to\infty} (\mathrm{A}u - f, u^{(m)} - u) = 0 ;$$

ne segue

$$\max \lim_{m\to\infty} (\mathrm{A}u^{(m)} - \mathrm{A}u , u^{(m)} - u) \leq 0$$

e quindi per la coercitività,

$$\lim_{m\to\infty} \| u^{(m)} - u \| = 0 .$$

Ovviamente allora anche la successione $\{r^{(m)}\} = \{\mathrm{A}u^{(m)} - f\}$ converge fortemente in $\mathscr{H}$ e detto $r = \mathrm{A}u - f$ il suo limite si ha per (8) $r \in \mathscr{K}^* = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathscr{K}_m^*}$.

Infine, per il lemma di Minty, passando al limite nella disequazione variazionale ($\mathbf{P}_m^*$) si ha

$$(\mathrm{A}^{-1} s + g , s - r) \geq 0 \qquad \text{per ogni} \quad s \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathscr{K}_m^*$$

e quindi per ogni $s \in \mathscr{K}^* = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathscr{K}_m^*}$.

Bibliografia

[1] U. Mosco (1969) – *Convergence of Convex Sets and of Solutions of Variational Inequalities*, «Adv. in Math.», *3*, 510–585.

[2] G. Stampacchia (1964) – *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes*, «Compt. Rend. Acad. Sci. Paris», *258*, 4413–4416.