
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

LUCIANO CARBONE, ALBERTO VALLI

**Filtrazione di un fluido in un mezzo non omogeneo
tridimensionale**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 61 (1976), n.3-4, p.
161–164.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_3-4_161_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1976 (Settembre-Ottobre)

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *Filtrazione di un fluido in un mezzo non omogeneo tridimensionale.* Nota (*) di LUCIANO CARBONE e ALBERTO VALLI, presentata dal Corrisp. G. STAMPACCHIA.

SUMMARY. — We prove the existence of a unique solution for a free boundary problem relative to the stationary flow between two water reservoirs of different levels separated by a non-homogeneous dam with variable cross section.

Lo studio della filtrazione di un fluido è stato effettuato da Baiocchi [1], [2], Stampacchia [6], Caffarelli [4] in mezzi omogenei, e da Benci [3] in mezzi non omogenei, bidimensionali. Intendiamo qui esporre alcuni risultati relativi a questo problema nel caso non omogeneo e tridimensionale.

Consideriamo un canale di lunghezza infinita, trasversalmente ostruito da una diga D a pareti verticali, di materiale non omogeneo. Siano H e h ($H > h > 0$) il livello del fluido prima e dopo la diga. Scelto un sistema di riferimento cartesiano (x, y, z) , dove l'asse z è perpendicolare al fondo del canale e diretto verso l'alto, l'asse y giace nella direzione dello scorrere del fluido in D e l'asse x è perpendicolare alle pareti laterali del canale, si definiscono i seguenti insiemi:

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 < x < d, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x), 0 < z < H\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \bar{D} \mid 0 < x < d, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x), z = 0\}$$

$$T = \{(x, y, z) \in \bar{D} \mid 0 < x < d, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x), z = H\}$$

$$\Phi_1 = \{(x, y, z) \in \bar{D} \mid y = \varphi_1(x)\}$$

$$\Phi_2 = \{(x, y, z) \in \bar{D} \mid y = \varphi_2(x), 0 \leq z \leq h\}$$

$$\Phi_3 = \{(x, y, z) \in \bar{D} \mid y = \varphi_2(x), h \leq z \leq H\}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1976.

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \bar{D} \mid x = 0\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \bar{D} \mid x = d\}$$

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \bar{D} \mid 0 < x < d, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x), z = G(x, y)\}$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in D \mid 0 < z < G(x, y)\}$$

ove φ_1 e $\varphi_2: [0, d] \rightarrow \mathbf{R}$ sono funzioni $C^2([0, d])$ soddisfacenti le condizioni:

$$(1.1) \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1'(d) = \varphi_2'(0) = \varphi_2'(d) = 0, \quad \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$$

e $G: \bar{B} \rightarrow [0, H]$ è una funzione tale che:

$$(1.2) \quad G|_{\Phi_1 \cap \bar{B}} = H; \quad G|_{\Phi_2 \cap \bar{B}} \geq h.$$

Introdotta la quota piezometrica u , come in Muskat [5], e la permeabilità $K(x, y, z)$ del mezzo poroso, il problema di frontiera libera che vogliamo affrontare si può enunciare con precisione nella forma seguente:

PROBLEMA 1. Trovare una funzione $G(x, y): \bar{B} \rightarrow [0, H]$, con grafico lipschitziano in un opportuno sistema di coordinate, che verifichi le (1.2) e sia tale che esista una e una sola funzione reale

$$u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$$

soluzione variazionale di:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} [K \operatorname{grad} u] &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= H && \text{su } \Phi_1 \\ u &= h && \text{su } \Phi_2 \\ u &= z && \text{su } \Phi_3 \cap \bar{\Omega} \\ \frac{du}{dn} &= 0 && \text{su } B \cup (S_1 \cap \bar{\Omega}) \cup (S_2 \cap \bar{\Omega}) \\ u &= z && \text{su } \Gamma \\ \frac{du}{dn} &= 0 && \text{su } \Gamma \\ \Gamma \cap T &= \emptyset \end{aligned}$$

ove $K \in L^\infty(\Omega)$ e $\inf_{\Omega} K > 0$.

Per le proprietà di φ_1 e φ_2 , esiste un settore chiuso C di direzioni che puntano tutte all'interno di B su Φ_1 e al di fuori di B su Φ_2 (e in modo tale che la direzione vers $\hat{y}$ appartenga a C). Possiamo allora introdurre la seguente ipotesi:

IPOTESI A. Una matrice $E = (e_{ij})$ verifica l'ipotesi A se è ortogonale e tale che:

$$E \operatorname{vers} \hat{x} = \mp \eta \quad \text{oppure} \quad E \operatorname{vers} \hat{y} = \mp \eta$$

con $\eta \in C$.

Siamo così in grado di enunciare il principale teorema che abbiamo dimostrato:

TEOREMA 2. Siano $a, b, g \in H_{loc}^{2,p}(\mathbf{R})$ per $p > 3$, con $g'(z) \geq 0$, e sia $E = (e_{ij})$ una matrice che verifica l'ipotesi A. Sia:

$$K(x, y, z) = \exp [a(e_{11}x + e_{12}y) + b(e_{21}x + e_{22}y) + g(z)].$$

Allora il Problema I ammette una e una sola soluzione purchè sia verificata una delle seguenti condizioni supplementari:

(1) φ_1 e φ_2 sono entrambe non decrescenti o non crescenti, ed $E = (\delta_{ij})$.

(2) $\sup a'' \leq \inf b''$.

La dimostrazione del teorema si basa su una trasformazione introdotta da Baiocchi in [1], tramite la quale il Problema I (di frontiera libera) viene tradotto nella seguente disequazione variazionale:

$$w \in \mathbf{K}: \int_D e^{a+b-g} \text{grad } w \text{ grad } (v-w) \, dx \, dy \, dz \geq - \int_D e^{a+b} (v-w) \, dx \, dy \, dz \quad \forall v \in \mathbf{K}$$

ove:

$$\mathbf{K} = \{v \in H^1(D) \mid v = 0 \quad \text{su} \quad \partial D \setminus (S_1 \cup S_2), v \geq 0 \text{ in } D\}$$

$$\theta = \begin{cases} \int_z^H e^{g(\xi)} (H - \xi) \, d\xi & \text{su } \Phi_1 \\ \int_z^h e^{g(\xi)} (h - \xi) \, d\xi & \text{su } \Phi_2 \\ \alpha & \text{su } B \\ 0 & \text{su } \partial D \setminus (\Phi_1 \cup \Phi_2 \cup B) \end{cases}$$

ed α è la soluzione variazionale di:

$$-\text{div} [e^{a+b} \text{grad } \alpha] = 0 \quad \text{in } B$$

$$\frac{d\alpha}{dn} = 0 \quad \text{su } (S_1 \cup S_2) \cap \bar{B}$$

$$\alpha = \int_0^H e^{g(\xi)} (H - \xi) \, d\xi \quad \text{su } \Phi_1 \cap \bar{B}$$

$$\alpha = \int_0^h e^{g(\xi)} (h - \xi) \, d\xi \quad \text{su } \Phi_2 \cap \bar{B}.$$

La soluzione (u, G, Ω) del Problema 1 si ottiene da w , ponendo:

$$u = z - e^{-\theta(z)} w_z \quad ; \quad G(x, y) = \inf \{z \in [0, H] \mid w(x, y, z) = 0\};$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in D \mid w(x, y, z) > 0\}.$$

L'unicità della soluzione u è allora immediata.

Per completare la dimostrazione del Teorema 2, il punto delicato risiede nel dimostrare che la frontiera libera $\Gamma = \partial\Omega \setminus (\partial D \setminus T)$ è una superficie lipschitziana.

A tale scopo si utilizza un procedimento di penalizzazione e di riflessione rispetto a T , del tipo di quello introdotto da Caffarelli [4]. Le geometria del dominio D e le condizioni al bordo assegnate consentono di dimostrare che w e le funzioni approssimanti $\in H^{2,p}(D)$.

Da questo fatto segue che w è una sottosoluzione su ogni piano $\pi = \{z = \text{cost.}\}$, e che di conseguenza sono note su Φ_1, Φ_2 e Φ_3 le derivate w_η con $\eta \in C$. Applicando poi il principio del massimo si ricava che $w_\eta \leq 0$ in $\bar{D}$, per cui il cono $\vec{X} = \vec{X}_0 + a_1 \eta + a_2 \delta$, con $\vec{X}_0 \in \Gamma$, $\eta \in C$, e $\delta = (0, 0, 1)$, è contenuto in Ω per $a_1 < 0, a_2 < 0$, ed è contenuto in $D \setminus \bar{\Omega}$ per $a_1 > 0, a_2 > 0$.

Si può così provare la seguente Proposizione:

PROPOSIZIONE 3. *La frontiera libera Γ è lipschitziana in un opportuno sistema di coordinate.*

Si ottengono poi ulteriori risultati riguardanti la frontiera libera Γ . Detto P_η un qualsiasi piano di giacitura (η, z) , con $\eta \in C$, si ha:

PROPOSIZIONE 4. *$\Gamma \cap P_\eta$ non contiene segmenti orizzontali (e quindi Γ non contiene pezzi aperti giacenti su un piano orizzontale); Γ non contiene pezzi aperti giacenti su un piano di normale η .*

Le dimostrazioni dei risultati qui enunciati saranno esposte in un lavoro di prossima pubblicazione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. BAIocchi (1972) - *Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica*, «Ann. Mat. Pura e appl.», 92, 107-122.
- [2] C. BAIocchi, V. COMINCIOLI, E. MAGENES e G. A. POZZI (1973) - *Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous medium*, «Ann. Mat. pura e appl.», 96, 1-82.
- [3] V. BENCI (1974) - *On a filtration problem through a porous medium*, «Ann. Mat. pura e appl.», 100, 191-209.
- [4] L. A. CAFFARELLI - *The smoothness of the free surface in a filtration problem* (in corso stampa).
- [5] U. MUSKAT (1972) - *The flow of homogeneous fluids through porous media*. New York, McGraw-Hill.
- [6] G. STAMPACCHIA (1974) - *On the filtration of a fluid through a porous medium with variable cross section*, «Russ. Math. Surveys», 29 (4), 89-102.