Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sandra Sabbi

Sulle equazioni costitutive nei corpi ferromagnetici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.1-2, p. 82–87.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_1-2_82_0>

Fisica matematica. — *Sulle equazioni costitutive nei corpi ferromagnetici.* Nota (*) di SANDRA SABBI (**), presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — It is shown that the constitutive equations established by Crupi for ferromagnetic bodies can be simplified assuming the magnetic energy to be function of the magnetic field. Furthermore some consequences of the Crupi equations are derived when the above mentioned assumption is not verified.

1. In una Nota pubblicata di recente [1], il prof. G. Crupi ha ricavato alcune equazioni costitutive per corpi ferromagnetici anche anisotropi, precisamente la relazione fra il vettore induzione **B** e il campo magnetico **H**, qualora si trascuri l'isteresi.

Scelto per comodità un sistema cartesiano ortogonale di coordinate y_i $(i = 1, 2, 3)$ e dette B_i e H_i rispettivamente le componenti lungo y_i del vettore **B** e del campo **H**, nel medesimo punto P del corpo, il Crupi ricava le formule:

$$(1.1) \qquad B_i = \mu_{ik} H_k ; \qquad\qquad (1.2) \qquad \mu_{ik} = \eta_{ik} + \gamma_{ikpq} H_p H_q + \varepsilon_{rik} \nu_{rs} H_s$$

dove η_{ik}, γ_{ikpq}, ν_{rs} sono tensori, il primo e l'ultimo doppi, il secondo quadruplo, e ε_{rik} è il tensore di Ricci.

Nella (1.1) e nella (1.2) sono, al solito, sottintese le sommatorie da 1 a 3 rispetto agli indici ripetuti, più precisamente rispetto a k nella (1.1), rispetto a p, q, r, s nella (1.2).

Sostituendo le (1.2) nella (1.1) si ha:

$$(1.3) \qquad B_i = \eta_{ik} H_k + \gamma_{ikpq} H_q H_p H_k + \varepsilon_{rik} \nu_{rs} H_s H_k .$$

Come ha osservato il Crupi [2, *n.* 1], è sempre possibile, senza alterare l'espressione di **B** suppore γ_{ikpq} simmetrico rispetto ai tre ultimi indici.

In questa Nota ho anzitutto ricercato a quali condizioni devono soddisfare i tensori che compaiono in (1.3), qualora si ammetta l'esistenza in ogni punto P del corpo di una densità di energia magnetica τ (1), funzione del vettore campo magnetico **H** (o che è lo stesso delle sue componenti) in P, e, conforme al teorema di Poynting, sia:

$$(1.4) \qquad d\tau = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} .$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1976.

(**) Borsista del C.N.R.

(1) Come è noto, densità di energia magnetica, in un punto P, è il rapporto fra l'energia contenuta in un elemento di volume dV, di centro P e lo stesso dV.

In base a questa ipotesi ho provato che il tensore γ_{ikpq} è simmetrico rispetto a tutti i quattro indici (risultato a cui arriva anche il Crupi [1, n. 4] [2, n. 1], ma con altre considerazioni) e il tensore ν_{rs} si riduce a $m\delta_{rs}$ (dove m è un numero e δ_{rs} il simbolo di Kronecker). Però in questo caso, come ha osservato in sostanza il Crupi [1, n. 4], l'ultimo termine di (1.3) è nullo, in altre parole, nell'ipotesi dell'esistenza dell'energia il tensore ν_{rs} si può ritenere nullo.

Se ν_{rs} non è nullo e il campo magnetico agente sul corpo è periodico, l'integrale di $\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}$ su un periodo può risultare diverso da zero, come è intuitivo e come verrà provato con un semplice esempio.

Se detto integrale è diverso da zero, potrà allora risultare positivo o negativo, nel primo caso si ha una specie di dissipazione dell'energia nel corpo, nel secondo caso il corpo cederebbe energia, il chè non sembra comprovato dall'esperienza.

Forse da questa difficoltà si può uscire tenendo conto dei fenomeni di isteresi di cui la conseguente dissipazione di energia potrebbe compensare l'energia ceduta dal corpo. Ma su questo argomento intendo tornare in un altro lavoro.

2. Come si è detto, ammessa la validità della (1.4) si ha:

$$d\tau = \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B} = d(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}\cdot d\mathbf{H}. \tag{2.1}$$

Poiché $d\tau$ è, nella nostra ipotesi, un differenziale esatto nelle H_i e $d(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$ pure, perchè per le (1.1) e (1.2) $\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$ è funzione delle H_i, sarà:

$$\mathbf{B}\cdot d\mathbf{H} = B_i\, dH_i$$

un differenziale esatto nelle H_i. Ciò porta alle relazioni (dove con $B_{i/j}$ si indica la derivata parziale di B_i rispetto ad H_j):

$$B_{i/j} = B_{j/i} \qquad \text{con} \quad i \neq j.$$

Per cui, ricordando (1.3), la simmetria di γ_{ikpq} rispetto agli ultimi tre indici e che $H_{k/j} = \delta_{jk}$,

$$\begin{aligned} \eta_{ij} + 3\,\gamma_{ijpq} H_p H_q + \varepsilon_{rik}\,\nu_{rj} H_k + \varepsilon_{rij}\,\nu_{rs} H_s = \\ = \eta_{ji} + 3\,\gamma_{jipq} H_p H_q + \varepsilon_{rjk}\,\nu_{ri} H_k + \varepsilon_{rji}\,\nu_{rs} H_s. \end{aligned}$$

Ora ai due membri di questa relazione compaiono termini indipendenti dalle componenti di $\mathbf{H}$, poi termini di secondo e di primo grado nelle componenti di $\mathbf{H}$. Poiché i termini dello stesso grado devono essere uguali, si ha allora scambiando nelle ultime sommatorie a primo e a secondo membro s con k:

$$\eta_{ij} = \eta_{ji}\,; \tag{2.2}$$

$$\gamma_{ijpq} H_p H_q = \gamma_{jipq} H_p H_q \tag{2.3}$$

$$(\varepsilon_{rik}\,\nu_{rj} + \varepsilon_{rij}\,\nu_{rk}) H_k = (\varepsilon_{rjk}\,\nu_{ri} + \varepsilon_{rji}\,\nu_{rk}) H_k. \tag{2.4}$$

Dalla (2.3), valida per ogni H_p e H_q, è:

$$\gamma_{ijpq} = \gamma_{jipq} \tag{2.5}$$

cioè, come si è affermato, il tensore γ_{ikpq} è simmetrico rispetto ai suoi quattro indici.

Si ha poi da (2.4), tenendo conto dell'arbitrarietà di H_k,

$$\varepsilon_{rik} \nu_{rj} - \varepsilon_{rjk} \nu_{ri} + 2 \varepsilon_{rij} \nu_{rk} = 0 \tag{2.6}$$

relazione valida per ogni valore di i, j e k.

Se $i = j$ l'equazione si riduce ad una identità. Supporremo quindi in seguito $i \neq j$. Sia ora $j = k$ sicché, annullandosi il secondo addendo a primo membro, resta:

$$3 \varepsilon_{rik} \nu_{rk} = 0 \tag{2.7}$$

dove r può assumere solo il valore diverso da i e da k. Dunque:

$$\nu_{rk} = 0 \qquad \text{con} \quad r \neq i \, , r \neq k. \tag{2.8}$$

La (2.8) vale per ogni coppia di numeri positivi r e k (compresi fra 1 e 3) purché diversi fra loro; basta infatti scegliere come i l'intero diverso da r e da k.

Si prendano ora i, j e k tutti diversi tra loro, nel primo termine della sommatoria (2.6) dovrà essere $r = j$, nel secondo $r = i$, nel terzo $r = k$ in quanto per tutti gli altri valori di r si hanno termini nulli. Si ha così, per ovvie proprietà del tensore di Ricci:

$$\nu_{jj} + \nu_{ii} - 2 \nu_{kk} = 0 \, . \tag{2.9}$$

Scambiano i con k la (2.9) rimane valida e da essa si ha:

$$\nu_{jj} + \nu_{kk} - 2 \nu_{ii} = 0 \, . \tag{2.10}$$

Da cui, sottraendo membro a membro (2.10) da (2.9), segue (posto poi $\nu_{ii} = m$):

$$\nu_{ii} = \nu_{kk} = m$$

e per la (2.9) segue: $\nu_{jj} = m$, quindi si conclude che

$$\nu_{rs} = m \delta_{rs} \, .$$

Dunque:

$$\varepsilon_{rik} \nu_{rs} H_s H_k = m \varepsilon_{rik} \delta_{rs} H_s H_k = m \varepsilon_{rik} H_r H_k = 0. \tag{2.11}$$

Quindi conforme ad una osservazione del Crupi, l'ultimo termine di (1.3) è nullo, cioè nella equazione costitutiva si può supporre $\nu_{rs} \equiv 0$. Allora con le condizioni (2.2), (2.5), (2.11) e ricordando la simmetria di γ_{ikpq}, si ha:

$$d\tau = H_i \, dB_i = H_i \, \eta_{ik} \, dH_k + H_i \, d(\gamma_{ikpq} H_p H_q H_k) =$$

$$= \frac{1}{2} d(\eta_{ik} H_i H_k) + \frac{3}{4} d(\gamma_{ikpq} H_p H_q H_k H_i).$$

Da cui integrando e supposto $\tau = 0$ per $\mathbf{H} = 0$, si ha la seguente formula per l'energia magnetica:

$$\tau = \frac{1}{2} \eta_{ik} H_i H_k + \frac{3}{4} \gamma_{ikpq} H_p H_q H_k H_i . \tag{2.12}$$

3. Ammettiamo ora non valida l'ipotesi dell'esistenza della densità di energia magnetica τ, però ancora valida l'equazione costitutiva (1.3) e che, conforme al teorema di Poynting, l'energia comunicata nell'intervallo di tempo $(t, t + dt)$ all'elemento di volume dV del corpo divisa per dV stesso (in seguito diremo comunicata all'unità di volume, notando che, ovviamente, se tale energia risulta negativa è in realtà energia ceduta dal corpo) è $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} dt$.

Ammesso, per semplificare, η_{ij} e γ_{ikpq} simmetriche, si ha (con τ espressa da (2.12)):

$$\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{d\tau}{dt} + \frac{d}{dt} (\varepsilon_{rik} \nu_{rs} H_s H_k) H_i . \tag{3.1}$$

Introdotta una trasformazione lineare (o omografia vettoriale) ν di componenti ν_{rs}, sicché $\nu_{rs} H_s$ vale la componente lungo y_r di $\nu\mathbf{H}$, la (3.1) si può scrivere:

$$\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{d\tau}{dt} + \frac{d}{dt} (\mathbf{H} \times \nu\mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} = \frac{d}{dt} (\tau + \mathbf{H} \times \nu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H} \times \nu\mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{H}}{dt} . \tag{3.2}$$

Ora si supponga che il campo magnetico $\mathbf{H}$ sia la somma di un vettore dipendente dal tempo con legge sinusoidale e di un vettore ordinario $\boldsymbol{a}$ indipendente dal tempo. Sia cioè:

$$\mathbf{H}(t) = \boldsymbol{c} \exp(i\omega t) + \boldsymbol{c}^* \exp(-i\omega t) + \boldsymbol{a} \tag{3.3}$$

dove i è l'unità immaginaria, $\boldsymbol{c}$ è un vettore complesso (cioè del tipo $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} + i\boldsymbol{f}$ con $\boldsymbol{d}$ ed $\boldsymbol{f}$ vettori ordinari) e $\boldsymbol{c}^*$ il suo complesso coniugato (da cui $\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{d} - i\boldsymbol{f}$). Ovviamente è allora:

$$\mathbf{H}(t) = 2 (\cos \omega t \boldsymbol{d} - \operatorname{sen} \omega t \boldsymbol{f}) + \boldsymbol{a} \tag{3.4}$$

Essendo $\mathbf{H}$ funzione periodica di t, in un periodo $T = 2\pi/\omega$, tali saranno le sue componenti e quindi anche τ e $\mathbf{H} \times \nu\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}$, in particolare queste due grandezze hanno lo stesso valore negli istanti zero e T. Allora l'energia $\mathcal{U}$ comunicata in un periodo per unità di volume del corpo si ottiene integrando da zero a T la (3.2) e tenendo presente l'osservazione fatta:

$$\mathcal{U} = \int_0^T \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} dt = - \int_0^T (\mathbf{H} \times \nu\mathbf{H}) \cdot \frac{d\mathbf{H}}{dt} dt . \tag{3.5}$$

Ora nel nostro caso si ha:

$$\mathbf{H} \times \nu\mathbf{H} = \exp(i\omega t)\,[\boldsymbol{a} \times \nu \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \nu \boldsymbol{a}] + \exp(-i\omega t)\,[\boldsymbol{a} \times \nu \boldsymbol{c}^* + \boldsymbol{c}^* \times \nu \boldsymbol{a}] +$$
$$+ \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} \exp(2\,i\omega t) + \boldsymbol{q}^* \exp(-2\,i\omega t)$$

dove $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ sono vettori indipendenti dal tempo di cui non è necessario scrivere l'espressione. Ricordando che:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t} = i\omega\,[\exp(i\omega t)\,\boldsymbol{c} - \exp(-i\omega t)\,\boldsymbol{c}^*]$$

si ha allora:

$$\mathbf{H} \times \nu\mathbf{H} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t} = i\omega\,(-\boldsymbol{a} \times \nu \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}^* - \boldsymbol{c} \times \nu \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}^* + \boldsymbol{a} \times \nu \boldsymbol{c}^* \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}^* \times \nu \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) + s \tag{3.6}$$

dove in s sono raggruppati i termini in $\exp(in\omega t)$ con n che può assumere i valori $1, 2, 3, -1, -2, -3$; quindi l'integrale da zero a T di s è nullo.

Si integri ora la (3.6) da zero a T ricordando che la differenza fra due numeri complessi coniugati α e α^* vale $2\,i\mathscr{I}(\alpha)$, dove $\mathscr{I}(\alpha)$ indica la parte immaginaria di α, si ha:

$$\begin{aligned} \mathscr{U} &= -2\,\omega i\,\mathrm{T} i\,\mathscr{I}(\boldsymbol{c}^* \times \nu\,\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} \times \nu \boldsymbol{c}^* \cdot \boldsymbol{c}) = \\ &= 4\,\pi\mathscr{I}((\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c}^*) \cdot \nu \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \nu \boldsymbol{c}^*). \end{aligned} \tag{3.7}$$

L'espressione di $\mathscr{U}$ è in generale diversa da zero, come si ha subito dal seguente esempio. Sia:

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{B}\boldsymbol{i}\,;\ \boldsymbol{c} = \mathrm{A}\,(\boldsymbol{i} + i\boldsymbol{j})\,; \qquad \boldsymbol{c}^* = \mathrm{A}\,(\boldsymbol{i} - i\boldsymbol{j}) \tag{3.8}$$

con $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ versori rispettivamente degli assi y_1 e y_2 e A, B costanti reali non nulle, cioè, si ricordi (3.3), si ha $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}$, sicché $\mathbf{H}(t)$ è la somma di un campo costante e di un campo rotante in senso orario. Ora è:

$$(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c}^*) \cdot \nu \boldsymbol{a} = -2\,i\mathrm{A}^2\,\mathrm{B}\,\boldsymbol{k} \cdot \nu \boldsymbol{i}$$

$$(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \nu \boldsymbol{c}^* = -\mathrm{AB}i\,\boldsymbol{k} \cdot \nu \boldsymbol{c}^* = -\mathrm{A}^2\,\mathrm{B}i\,\boldsymbol{k} \cdot \nu \boldsymbol{i} + \mathrm{A}^2\,\mathrm{B}\boldsymbol{k} \cdot \nu \boldsymbol{j}$$

ricordando che $\boldsymbol{k} \cdot \nu \boldsymbol{i} = \nu_{31}$ si ha, dalla (3.7)

$$\mathscr{U} = -12\,\pi\,(\mathrm{A}^2\,\mathrm{B})\,\nu_{31}\,. \tag{3.9}$$

Dunque ora l'energia comunicata in un periodo all'unità di volume del corpo è diversa da zero se $\nu_{31} \neq 0$. Questa ipotesi può verificarsi per esempio nel sistema ortorombico. Crupi infatti trova [2, n. 2] che in questo sistema esistono autovettori per $\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ paralleli agli assi ortogonali x_1, x_2, x_3, con corrispondenti autovalori $\nu_{11}, \nu_{22}, \nu_{33}$ diversi tra loro. Ora supposto:

$$\boldsymbol{j} = \varepsilon_2 \quad , \quad \boldsymbol{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \quad , \quad \boldsymbol{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$$

si ha:

$$\nu_{31} = \nu \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \frac{\nu_{11}\,\varepsilon_1 + \nu_{33}\,\varepsilon_3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\sqrt{2}} = \frac{\nu_{11} - \nu_{33}}{2} \neq 0.$$

Si noti anche che $\mathcal{U}$ cambia di segno al variare del segno di B, quindi può essere sia negativa che positiva, conforme a quanto si è detto in principio. Inoltre se fosse $\boldsymbol{c} = \mathrm{A}\,(\boldsymbol{i} - i\boldsymbol{j})$, cioè se il campo ruotante fosse antiorario, è facile vedere che il secondo membro della (3.9) avrebbe segno opposto, quindi se col campo ruotante in un senso $\mathcal{U}$ fosse positiva, sarebbe negativa nel caso di campo ruotante in senso opposto.

Come è ovvio questo risultato è generale. Infatti l'espressione:

$$\mathbf{H} \times \nu\mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} = \varepsilon_{rik}\, \nu_{rs}\, \mathrm{H}_s\, \mathrm{H}_k\, d\mathrm{H}_i$$

se non è identicamente nulla, non è un differenziale esatto. Quindi nello spazio rappresentativo del campo magnetico **H** (cioè nello spazio in cui ogni punto Q ha coordinate $(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3)$), se le H_i variano periodicamente, il punto Q percorre un ciclo chiuso, sicché se $\mathcal{U}$ è positiva percorrendo il ciclo in un senso, sarà negativa percorrendo tale ciclo in senso opposto.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. CRUPI (1973) – *Sull'asimmetria del tensore permeabilità magnetica nei corpi ferromagnetici*, « Rend. dell'Istituto Lombardo », *A 107*, 83–94.

[2] G. CRUPI (1974) – *Sul tensore permeabilità magnetica nei mezzi ferromagnetici anisotropi*, « Rend. dell'Istituto Lombardo », *A 108*, 94–106.