Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlos Enrique D'Attelis

Ogni operatore espansivo è J-contrattivo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.1-2, p. 45–48.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_1-2_45_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Analisi funzionale. — *Ogni operatore espansivo è J-contrattivo.* Nota [(*)] di CARLOS ENRIQUE D'ATTELLIS, presentata dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — It is shown that for an expansive operator T on a Hilbert space $(H, \langle , \rangle)$ there exists a nontrivial involution J (i.e. satisfying $J \neq -I$) such that the operator T is J-contractive on $(H, [,])$, $[,]$ being the indefinite inner product defined by J.

1. Denotiamo col simbolo $\langle \cdot , \cdot \rangle$ il prodotto interno nello spazio di Hilbert H. La

$$[x, y] \overset{\text{def}}{=} \langle Jx, y \rangle = \langle x, Jy \rangle,$$

ove J è un'operatore che ha le proprietà $J^2 = I$, $J^* = J$ (J è un'involuzione), definisce un nuovo prodotto interno *indefinito* (cfr. [1]).

Sia T un operatore lineare e limitato definito in H. Diremo che T è un *operatore espansivo* se si verifica la

$$I - T^* T < 0, \quad \text{ma non la} \quad I - TT^* < 0;$$

e che T è un operatore J-contrattivo se è valida la

$$J - T^* JT \geq 0.$$

Si vede immediatamente che, nel caso $J = -I$, ogni operatore espansivo è J-contrattivo.

Scopo di questa Nota è di stabilire che si può sempre trovare un modo non triviale di definire J (cioè $J \neq -I$), tale che un'operatore espansivo sullo spazio $(H, \langle , \rangle)$ sia J-contrattivo sulla spazio $(H, [,])$.

2. Porremo

$$Q_T = I - T^* T,$$

$$Q_{T^*} = I - TT^*.$$

Denotiamo con $Rg\, Q_T$ l'insieme $\{y \in H / y = Q_T x\}$, e con $N(Q_T)$ il nucleo dell'operatore Q_T.

LEMMA 1. *Ipotesi.* $N(Q_{T^*}) \neq \{0\}$. *Tesi.* $T^*(N(Q_{T^*})) \neq \{0\}$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che si abbia

$$T^*(N(Q_{T^*})) = \{0\}.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1976.

Se $y \in N(Q_{T^*})$, è valida la $y = TT^* y$. Abbiamo inoltre $y \in N(T^*)$. Da questo risulta

$$y = TT^* y = 0,$$

il che contradice l'ipotesi.

LEMMA 2. *Ipotesi*. T è espansivo. *Tesi*. $N(Q_{T^*}) = \{0\}$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che si abbia $N(O_{T^*}) \neq \{0\}$. Dal Lemma 1 si ottiene

$$T^*(N(Q_{T^*})) \neq \{0\} ;$$

quindi esiste un $x \neq 0$ che verifica la $x \in T^*(N(Q_{T^*}))$. Allora può trovarsi un $z \neq 0$, $z \in N(Q_{T^*})$, tale che

$$x = T^* z. \tag{2.1}$$

Per $z \in N(Q_{T^*})$ è valida la

$$z = TT^* z. \tag{2.2}$$

Dalla (2.1) otteniamo le

$$Tx = TT^* z, \tag{2.3}$$

$$\langle x , x \rangle = \langle T^* z , T^* z \rangle = \langle TT^* z , z \rangle .$$

Da quest'ultima si ricava, tenendo conto delle (2.2) e (2.3),

$$\langle x , x \rangle = \langle TT^* z , TT^* z \rangle = \langle Tx , Tx \rangle ;$$

ossia

$$\| x \|^2 = \| Tx \|^2 \qquad \text{se} \quad x \neq 0,$$

il che contraddice l'ipotesi.

3. Allo scopo di ottenere una J–contrazione non triviale da un'operatore espansivo, dimostreremo il seguente

TEOREMA. *Ipotesi*. T è un'operatore espansivo. *Tesi*. Esiste un'involuzione J ($J \neq -I$) per la quale vale la

$$J - T^* JT \geq 0 .$$

Dimostrazione. Dal Lemma 2 si ricava

$$\overline{Rg\, Q_{T^*}} = N^{\perp}(Q_{T^*}) = H. \tag{3.1}$$

La rappresentazione polare dell'operatore Q_{T^*} è

$$Q_{T^*} = \tilde{J} \mid Q_{T^*} \mid ,$$

ove $\tilde{J}^2 = \tilde{P}$, e $\tilde{P}$ è il proiettore sul sottospazio $\overline{Rg\, Q_{T^*}}$. Tenendo conto di (3.1) si ricava $\tilde{J}^2 = I$.

Inoltre $\tilde{J}$ è hermitiano, eppertanto $\tilde{J}$ è un'involuzione.

Sia $\theta_T(\lambda)$ la funzione caratteristica di Kuzel dell'operatore T (cfr. [2]). Si verifica che (cfr. [2])

$$\theta_T^*(\lambda)\, \tilde{J}\, \theta_T(\lambda) \leq J , \qquad \text{per} \quad |\lambda| \leq 1 :$$

in particolare, se $\lambda = 0$ otteniamo

$$T^* \tilde{J} T \leq J. \tag{3.2}$$

Risulta utile considerare l'operatore B dato dalle

$$B = T^* T - I, \tag{3.3}$$

$$B > 0 \quad , \quad B^2 = Q_T^2 \tag{3.4}$$

per analizzare la rappresentazione polare dell'operatore

$$Q_T = J \mid Q_T \mid . \tag{3.5}$$

Dalle (3.3), (3.4) si ottiene immediatamente

$$\mid Q_T \mid = (Q_T^2)^{1/2} = T^* T - I. \tag{3.6}$$

Dimostreremo in seguito che l'operatore J che appare nella (3.5) ha in questo caso il valore $J = -I$.

L'operatore $\mid Q_T \mid$ è hermitiano; perciò anche $\mid Q_T \mid^{1/2}$ è hermitiano. Da questo segue

$$\begin{aligned} \| \mid Q_T \mid^{1/2} x \|^2 &= \langle \mid Q_T \mid^{1/2} x \,, \mid Q_T \mid^{1/2} x \rangle = \\ &= \langle \mid Q_T \mid x \,, x \rangle = \langle (T^* T - I)\, x \,, x \rangle = \\ &= \| Tx \|^2 - \| x \|^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dalla (3.7) si ricava che $x \in N\, [\mid Q_T \mid^{1/2}]$ se, e soltanto se,

$$\| Tx \|^2 = \| x \|^2.$$

Poiché T è un operatore espansivo, risulta $N\, [\mid Q_T \mid^{1/2}] = \{0\}$. Conseguenza di questo è la

$$\overline{Rg \mid Q_T \mid^{1/2}} = N^{\perp} (\mid Q_T \mid^{1/2}) = H.$$

Otteniamo quindi $\overline{Rg\, Q_T} = H$.

Allora il proiettore sul sottospazio $\overline{Rg\, Q_T}$ si riduce all'indentità, epperciò

$$J^2 = P = I. \tag{3.8}$$

Dalle (3.4), (3.5), (3.8) otteniamo

$$Q_T = J(T^* T - I), \qquad \text{con} \quad J = -I.$$

Da questo risultato e dalla (3.2) si ricava

$$T^* \mathring{J} T \leq -I. \tag{3.9}$$

Chiameremo H_+ e H_- gli spazi proprii che corrispondono ai due punti dello spettro di $\mathring{J}$, $+1$ e -1; e chiameremo P_+ e P_- i proiettori su ognuno di questi spazi. Porremo

$$P_+ x = x_+ \quad , \quad P_- x = x_- .$$

Otteniamo allora

$$\mathring{J} = P_+ - P_- \quad , \quad I = P_+ + P_- ,$$

e

$$\langle x , x \rangle = \langle x_+ , x_+ \rangle + \langle x_- , x_- \rangle,$$

$$\langle \mathring{J} x , x \rangle = \langle x_+ , x_+ \rangle - \langle x_- , x_- \rangle.$$

In conseguenza

$$\langle (\mathring{J} + I) x , x \rangle = \langle \mathring{J} x , x \rangle + \langle x , x \rangle = 2 \langle x_+ , x_+ \rangle \geq 0.$$

Si ricava, infine, $\mathring{J} \geq -I$.

Da questa formula risulta, tenendo conto della (3.9) che è valida la

$$T^* \mathring{J} T \geq \mathring{J};$$

ciò che completa la dimostrazione del Teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. G. KREIN (1970) – *Introduction to the geometry of indefinite* J*-spaces and to theory of operators in those spaces*, « Am. Math. Soc. Transl. », *93* (2), 103–176.

[2] O. V. KUZEL (1970) – *The characteristic operator function of an arbitrary bounded operator*, « Am. Math. Soc. Transl. », *90* (2), 225–228.