Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo De Bartolomeis

Stime in norme tipo Hardy dell'operatore $\bar{\delta}$ e teoremi di scrittura per le funzioni di $\mathcal{H}^p$ in domini strettamente pseudo-convessi di $\mathbf{C}^n$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.1-2, p. 30–36.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_1-2_30_0>

Analisi matematica. — *Stime in norme tipo Hardy dell'operatore $\bar\partial$ e teoremi di scrittura per le funzioni di $\mathscr{H}^p$ in domini strettamente pseudo–convessi di* $\mathbf{C}^n$. Nota (*) di PAOLO DE BARTOLOMEIS, presentata dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — We study "Hardy-like" growth of the solutions of the $\bar\partial$-problem in strictly pseudo-convex domains in $\mathbf{C}^n$ and we give a scripture result for functions in $\mathscr{H}^p$. The proofs of the statements announced here will appear elsewhere.

Lo studio degli spazi $\mathscr{H}^p$ di Hardy di più variabili complesse ha assunto negli ultimi anni sempre maggiore importanza per l'indagine da una parte sui valori al bordo (cfr. per esempio [1] e [8]) di certe classi di funzioni olomorfe, dall'altra in stretta connessione allo studio fine degli zeri di tali funzioni (cfr. per esempio [2]).

In questo lavoro si dà una stima della crescita al bordo tipo Hardy delle soluzioni C^∞ del $\bar\partial$–problem $\bar\partial u = F$ sui domini strettamente pseudo–convessi di $\mathbf{C}^n$ e da questo si deduce la nullità di certi gruppi di comologia del «fascio delle funzioni di $\mathscr{H}^p$».

Le dimostrazioni dei risultati contenuti in questo lavoro sono in corso di pubblicazione.

1. LA FUNZIONE NUCLEARE DI HENKIN

In tutto il corso dell'esposizione D sarà un dominio limitato di $\mathbf{C}^n$ strettamente pseudo–convesso a frontiera C^∞ i.e. $\exists \tilde{D}$ dominio di $\mathbf{C}^n$ contenente $\bar{D}$, $\exists \rho \in C^\infty(\tilde{D}, \mathbf{R})$ t.c.:

a) $D = \{z \in \tilde{D} \mid \rho(z) < 0\}$;

b) $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ t.c. se $V(\varepsilon_0) = \{z \in \tilde{D} \mid |\rho(z)| < \varepsilon_0\}$, ρ è strettamente plurisubarmonica ed ha gradiente sempre diverso da zero su $\overline{V(\varepsilon_0)}$;

porremo inoltre $D_\delta = \{z \in \tilde{D} \mid \rho(z) < -\delta\}$; le altre notazioni sono quelle usuali: fra queste, $\lambda(\zeta)$ sarà la misura di Lebesgue e dato U aperto, $\mathcal{O}(U)$ indicherà l'algebra delle funzioni olomorfe su U e A (U) l'algebra delle funzioni continue su $\bar{U}$ e olomorfe su U. Uno degli strumenti principali del nostro lavoro è costituito dalla formula di rappresentazione integrale per le funzioni olomorfe in domini strettamente pseudo–convessi di $\mathbf{C}^n$ data da Henkin [3]: ne useremo una versione leggermente migliorata, secondo il seguente enunciato:

(*) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1976.

TEOREMA 1.1. $\exists\delta > 0$ *t.c.* $\exists\Phi(z,\zeta) \in C^\infty(D_{-\delta}\times V(\delta), \mathbf{C})$ *detta funzione nucleare, olomorfa in z e t.c.*

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(z,\zeta)=0\\ \rho(z)\leq\rho(\zeta)\end{array}\right\}\Rightarrow z=\zeta$$

per cui

a) vale la scrittura

$$\Phi(z,\zeta)=\sum_{i=1}^{n}(z_i-\zeta_i)\,P_i(z,\zeta)$$

con

$$P_i(z,\zeta)\in C^\infty(D_{-\delta}\times V(\delta),\mathbf{C}) \qquad \textit{olomorfe in } z \qquad 1\leq i\leq n$$

b) $\forall\eta\in[0,\delta[$, $\forall f\in A(D_\eta)$ *vale la formula di rappresentazione integrale*: $\forall z\in D_\eta$

$$f(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D_\eta} f(\zeta)\,\frac{\omega'(P(z,\zeta))}{\Phi(z,\zeta)^n}\,\omega(\zeta)=\int_{\partial D_\eta} f(\zeta)\,H(z,\zeta)\,\sigma_\eta(d\zeta)$$

dove

$$P(z,\zeta)=(P_1(z,\zeta),\cdots,P_n(z,\zeta)) \quad , \quad \omega(\zeta)=d\zeta_1\cdots d\zeta_n\,,$$

$$\omega'(\eta)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\eta_i\,d\eta_1\cdots\widehat{d\eta_i}\cdots d\eta_n\,.$$

2. RAPPRESENTAZIONE INTEGRALI E NORME PER GLI SPAZI DI HARDY

Si consideri la famiglia di sottospazi vettoriali di $\mathcal{O}(D)$ degli spazi di Hardy:

se $1\leq p<\infty$:

$$\mathcal{H}^p(D)=\left\{f\in\mathcal{O}(D)\;\middle|\;\sup_{0<\varepsilon<\bar\varepsilon}\int_{\partial D_\varepsilon}|f|^p\,\sigma_\varepsilon(dz)<+\infty\right\}$$

e

$$\mathcal{H}^\infty(D)=\{f\in\mathcal{O}(D)\mid f \text{ limitata}\}$$

dove $\bar\varepsilon$ è una costante universale t.c., se $0<\varepsilon<\bar\varepsilon$

a) l'applicazione $\pi_\varepsilon:\partial D_\varepsilon\to\partial D$ determinata dalla normale esterna è un diffeomorfismo;

b) su D_ε vale la rappresentazione integrale precedentemente descritta;

è noto che questa è una buona definizione nel senso che non dipende dalla funzione frontiera scelta;

per prima cosa si osserva che se, data $f \in \mathscr{H}^p(D)$, $1 < p < \infty$, $\forall \varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$ si pone $f_\varepsilon(z) = f(\pi_\varepsilon^{-1}(z))$, dalla definizione stessa di $\mathscr{H}^p(D)$ segue subito che $\{f_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}}$ è una famiglia di funzioni definite su ∂D, limitata in $L^p(\partial D)$ e quindi debolmente relativamente compatta: pertanto $\exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$, successione di elementi di $]0, \bar{\varepsilon}[$, $\exists g \in L^p(\partial D)$, che chiameremo un'aderenza debole per f, t.c. $f_{\varepsilon_n} \rightharpoonup g$;

adesso è possibile estendere la rappresentazione integrale di Henkin alle funzioni di $\mathscr{H}^p(D)$, $1 < p < \infty$; più precisamente si ha la seguente:

PROPOSIZIONE 2.1. *Sia* $f \in \mathscr{H}^p(D)$, $1 < p < \infty$: $\exists g \in L^p(\partial D)$, *aderenza debole per* f, *t.c.*

$$\forall z \in D \qquad f(z) = \int_{\partial D} g(\zeta) H(z, \zeta) \sigma(d\zeta).$$

Nota: è noto (cfr. [8]) che se $f \in \mathscr{H}^p(D)$, $p > 0$, f ammette quasi ovunque su ∂D limite non tangenziale e tale limite è un elemento di $L^p(\partial D)$; l'Autore si propone di investigare in un prossimo lavoro i rapporti fra tale traccia e la rappresentazione integrale di Henkin.

Si può introdurre adesso una famiglia di norme su $\mathscr{H}^p(D)$: se $\eta \in]0, \bar{\varepsilon}[$, porremo, comprendendo in senso ovvio il caso $p = \infty$:

$$\| f \|_{(p,\eta)} = \sup_{0<\varepsilon<\eta} \left(\int_{\partial D_\varepsilon} | f |^p \sigma_\varepsilon(dz) \right)^{1/p};$$

mediante la rappresentazione integrale è facile vedere che tutte le norme così introdotte sono equivalenti: inoltre, se si considera una nuova famiglia di norme su $\mathscr{H}^p(D)$ data da:

$$\eta \in]0, \bar{\varepsilon}[\quad ||| f |||_{(p,\eta)} = \max(\| f \|_{L^p(D_\eta)}, \| f \|_{(p,\eta)}),$$

si ottengono ancora norme tutte equivalenti alle precedenti; norme di quest'ultimo tipo sembrano essere un buon analogo, per le funzioni $C^\infty(D, \mathbf{C})$, delle norme alla Hardy; più esattamente introdurremo:

$$\mathscr{M}^p(D, \rho) = \left\{ f \in C^\infty(D, \mathbf{C}) \mid \sup_{0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}} \int_{\partial D_\varepsilon} | f |^p \sigma_\varepsilon(dz) < +\infty \right\};$$

si osservi che tali spazi dipendono dalla funzione frontiera ρ scelta (si ricordi come nel caso delle funzioni olomorfe o armoniche l'indipendenza degli spazi $\mathscr{H}^p(D)$ dalla funzione frontiera si basi sull'esistenza di nuclei riproducenti);

in $\mathcal{M}^p(\mathrm{D}, \rho)$ le $\| \|_{(p,\eta)}$ sono soltanto seminorme e le $||| \; |||_{(p,\eta)}$ non sono equivalenti al variare di η; è chiaro, inoltre che gli elementi di $\mathcal{M}^p(\mathrm{D}, \rho)$, $1 < p < \infty$, ammettono aderenza debole, non certamente univocamente determinata, su $\partial\mathrm{D}$ e senz'altro se g è un'aderenza debole per $f \in \mathcal{M}^p(\mathrm{D}, \rho)$, $\| g \|_{\mathrm{L}^p(\partial\mathrm{D})} \leq \| f \|_{(p,\eta)}$.

3. IL $\bar{\partial}$-PROBLEM NEGLI SPAZI $\mathcal{M}^p(\mathrm{D}, \rho)$

Indicheremo con $\mathcal{M}^p_{(r,s)}(\mathrm{D}, \rho)$ lo spazio delle (r, s)-forme a coefficienti in $\mathcal{M}^p(\mathrm{D}, \rho)$ e su di esso in modo naturale considereremo le norme $||| \; |||_{(p,\eta)}$ come il massimo delle norme di tale tipo sui coefficienti: ci proponiamo di studiare il $\bar{\partial}$-problem $\bar{\partial}u = \mathrm{F}$ con $\mathrm{F} \in \mathcal{M}^p_{(0,1)}(\mathrm{D}, \rho)$ e $\bar{\partial}\mathrm{F} = 0$; seguiremo la tecnica della maggiorazione a priori, considerando prima il caso regolare:

se $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^\infty_{(0,1)}(\bar{\mathrm{D}}, \mathbf{C})$ e $\bar{\partial}\mathrm{F} = 0$, Henkin in [4] ha costruito la soluzione esplicita del $\bar{\partial}$-problem $\bar{\partial}u = \mathrm{F}$: per $n = 2$ (caso che seguiremo per semplicità di calcoli, osservando che le tecniche usate si generalizzano immediatamente a dimensione qualunque) tale soluzione esplicita è data da:

$$u(z) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \int_{\mathrm{D}} \frac{f_1(\zeta)(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) + f_2(\zeta)(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)}{|\zeta - z|^4} \, d\lambda(\zeta) + \right.$$

$$\left. + \int_{\partial\mathrm{D}} \frac{p_1(z, \zeta)(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) - p_2(z, \zeta)(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)}{|\zeta - z|^2 \, \Phi(z, \zeta)} [f_1(\zeta) \, d\bar{\zeta}_1 + f_2(\zeta) \, d\bar{\zeta}_2] \, d\zeta_1 \, d\zeta_2 \right\}$$

dove evidentemente $\Phi(z, \zeta) = p_1(z, \zeta)(z_1 - \zeta_1) + p_2(z, \zeta)(z_2 - \zeta_2)$ è la funzione nucleare;

adesso, se f è una funzione misurabile su D porremo

$$\mathrm{L}_i[f](z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathrm{D}} \frac{f(\zeta)(\bar{\zeta}_i - \bar{z}_i)}{|\zeta - z|^4} \, d\lambda(\zeta) \qquad i = 1, 2$$

se g è una funzione misurabile su $\partial\mathrm{D}$ porremo

$$\mathrm{M}_i[g](z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\mathrm{D}} \frac{p_1(z, \zeta)(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) - p_2(z, \zeta)(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)}{|\zeta - z|^2 \, \Phi(z, \zeta)} \, g(\zeta) \, d\bar{\zeta}_i \, d\zeta_1 \, d\zeta_2 \qquad i = 1, 2$$

ammettendo, come naturale in entrambi i casi il valore $+\infty$; è chiaro che in tali notazione: $u(z) = \sum_{i=1}^{2} \{\mathrm{L}_i[f_i] + \mathrm{M}_i[f_i]\}(z)$;

il primo passo, e questa è la parte più complessa, consiste nella stima della continuità degli operatori L_i nelle norme $||| \; |||_{(p,\eta)}$: in questo senso si ottiene il

LEMMA 3.1. $\forall p \;\; 1 \leq p \leq \infty$, $\forall \eta$, $\eta' \in]0, \bar{\varepsilon}[$ *t.c.* $\eta' > \eta$, $\exists K_p = K_p(|\eta - \eta'|)$ *costante t.c.* $\forall f \in \mathcal{M}^p(D, \rho)$ $|||\, L_i[f] \,|||_{(p,\eta)} \leq K_p(|\eta - \eta'|)\, |||\, f \,|||_{(p,\eta')}$.

Analogamente si ha il

LEMMA 3.2. $\forall p \;\; 1 \leq p \leq \infty$, $\exists \gamma > 0$ *t.c.* $\forall f \in L^p(\partial D)$

$$|||\, M_i[f] \,|||_{(p,\eta)} \leq \gamma \, \|f\|_{L^p(\partial D)}.$$

si verifica subito che questi due risultati forniscono una stima nelle norme $|||\;\;|||_{(p,\eta)}$ della soluzione esplicita alla Henkin del $\bar{\partial}$-problem $\bar{\partial} u = F$ nel caso regolare in cui $F \in C^{\infty}_{(0,1)}(\bar{D}, \mathbf{C})$; il passo successivo è quello di estendere tali stime al caso generale $F \in \mathcal{M}^p_{(0,1)}(D, \rho)$ $1 < p < \infty$:

sia, dunque, $F \in \mathcal{M}^p_{(0,1)}(D, \rho)$ $1 < p < \infty$, $\bar{\partial}$–chiusa, $F = f_1 \, d\bar{z}_1 + f_2 \, d\bar{z}_2$: siano $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ aderenze deboli di f_1 e f_2 rispettivamente su ∂D:

se $u(z) = \sum_{i=1}^{2} \{L_i[f_i] + M_i[\tilde{f}_i]\}(z)$ si ha subito, come maggiorazione a priori, in virtù dei risultati precedenti che

$$\forall \eta, \eta' \in]0, \bar{\varepsilon}[\text{ t.c. } \eta' > \eta : \; |||\, u \,|||_{(p,\eta)} \leq K_p^{(\eta)}(|\eta - \eta'|)\, |||\, F \,|||_{(p,\eta')};$$

sia adesso, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\varepsilon_n \in]0, \bar{\varepsilon}[$ e

$$\tilde{u}_n(z) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \int_{D_{\varepsilon_n}} \frac{f_1(\zeta)(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) + f_2(\zeta)(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)}{|\zeta - z|^4} \, d\lambda(\zeta) + \right.$$

$$\left. + \int_{\partial D_{\varepsilon_n}} \frac{p_1(z, \zeta)(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) - p_2(z, \zeta)(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)}{|\zeta - z|^2 \, \Phi(z, \zeta)} [f_1(\zeta)\, d\bar{\zeta}_1 + f_2(\zeta)\, d\bar{\zeta}_2]\, d\zeta_1 \, d\zeta_2 \right\}$$

$\tilde{u}_n$ è una soluzione C^{∞} del $\bar{\partial}$–problem su D_{ε_n} $\bar{\partial} u = F$: ponendo

$$u_n(z) = \begin{cases} \tilde{u}_n(z) & \text{se } z \in D_{\varepsilon_n} \\ 0 & \text{se } z \notin D_{\varepsilon_n} \end{cases}$$

si ha che, per un'opportuna scelta della successione $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $u_n \to u$ uniformemente sui compatti insieme a tutte le derivate: da ciò segue che $u \in C^{\infty}(D, \mathbf{C})$ e $\bar{\partial} u = F$; si è pertanto ottenuto il seguente

TEOREMA 3.3. *Sia* $D \subset \mathbf{C}^n$ *un dominio limitato strettamente pseudo–convesso a frontiera* C^{∞} *e* $F \in \mathcal{M}^p_{(0,1)}(D, \rho)$, $1 < p < \infty$, $\bar{\partial}$*–chiusa*: $\exists u \in \mathcal{M}^p(D, \rho)$ *che è soluzione del* $\bar{\partial}$*–problem su* D $\bar{\partial} u = F$ *e che soddisfa alle seguenti stime*

$$\forall \eta, \eta' \in]0, \bar{\varepsilon}[\; \eta' > \eta : \; |||\, u \,|||_{(p,\eta)} \leq K_p^{(\eta)}(|\eta - \eta'|)\, |||\, F \,|||_{(p,\eta')}$$

essendo $K_p^{(\eta)}(|\eta - \eta'|)$ costanti indipendenti da F.

4. NULLITÀ DI CERTI GRUPPI DI COMOLOGIA E TEOREMI DI SCRITTURA PER LE FUNZIONI DI $\mathscr{H}^p(\mathrm{D})$

Sia $1 < p < \infty$: si può definire su D un fascio di gruppi $\mathscr{S}^{(p)}$ nel modo seguente:

dato U aperto di $\bar{\mathrm{D}}$, si pone

$$\mathscr{S}^{(p)}(\mathrm{U}) = \begin{cases} \mathscr{O}(\mathrm{U}) & \text{se } \mathrm{U} \subset \mathrm{D} \\ \left\{ f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{U}) \mid f \text{ è olomorfa in } \mathrm{U} \cap \mathrm{D} \text{ e } \sup\limits_{0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}} \int\limits_{\partial \mathrm{D}_\varepsilon \cap \mathrm{U}} |f|^p \, \sigma_\varepsilon(\mathrm{d}z) < +\infty \right\} & \text{se } \mathrm{U} \not\subset \mathrm{D} \end{cases}$$

il prefascio cosi definito è canonico e ad esso si associa in modo naturale un fascio che sarà appunto $\mathscr{S}^{(p)}$; si osserva subito che: $\mathrm{H}^0(\bar{\mathrm{D}}, \mathscr{S}^{(p)}) = \mathscr{H}^p(\mathrm{D})$;

con tecniche abbastanza canoniche (cfr. per esempio [5], opp. [6]) dall'esistenza di soluzioni del $\bar{\partial}$–problem in $\mathscr{M}^p(\mathrm{D}, \rho)$ si ottiene:

LEMMA 4.1. $\mathrm{H}^1(\bar{\mathrm{D}}, \mathscr{S}^{(p)}) = 0$.

E, sulla base di questo risultato agevolmente si dimostra il

TEOREMA 4.2. (di scrittura per le funzioni di $\mathscr{H}^p(\mathrm{D})$), *sia* $\mathrm{D} \subset \mathbf{C}^2$ *un dominio limitato strettamente pseudo–convesso a frontiera* C^∞

e $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in \mathrm{D}$: $\forall f \in \mathscr{H}^p(\mathrm{D})$, $1 < p < \infty$, $\exists h_1, h_2 \in \mathscr{H}^p(\mathrm{D})$ *t.c.* $\forall z \in \mathrm{D}$

$$f(z) = f(z^0) + h_1(z)(z_1 - z_1^0) + h_2(z)(z_2 - z_2^0) .$$

Vogliamo concludere osservando che, applicando le tecniche fin qui usate ai nuclei di Øvrelid (cfr. [7]), è possibile affrontare con risultati del tutto analoghi il $\bar{\partial}$–problem $\bar{\partial}u = \mathrm{F}$ con $\mathrm{F} \in \mathscr{M}^p_{(0,q)}(\mathrm{D}, \rho)$, $1 < p < \infty$ e quindi la generalizzazione, mediante risoluzioni canoniche del fascio $\mathscr{S}^{(p)}$, del Teorema 4.2. a dimensione qualsiasi.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. FEFFERMAN e E. M. STEIN (1972) – H^p *spaces of several variables*, « Acta Mathematica », *129*, 137–193.

[2] L. GRUMAN (1975) – *The zeros of holomorphic functions in strictly pseudoconvex domains*, « Trans. of Amer. Math. Soc. », *207*, 163–174.

[3] G. M. HENKIN (1969) – *Integral representation of functions holomorphic in strictly pseudo-convex domains and some applications*, « Math. Sb. », *78* (120), 611–632 (Russian) and « Math. USSR Sb. », *7*, 597–616.

[4] G. M. HENKIN (1970) – *Integral representation of functions in strictly pseudoconvex domains and applications to the* $\bar{\partial}$*–problem*, « Math. Sb. », *82* (124), 300–308 (Russian) and « Math. USSR Sb. », *11*, 273–281.

[5] L. HÖRMANDER (1973) – *An introduction to complex analisis in several variables*. Amsterdam: North-Holland Pub. Co.

[6] N. KERZMAN e A. NAGEL (1971) – *Finitely generated ideals in certain function algebras*, « J. of Functional Analysis », 7, 212–215.

[7] N. ØVRELID (1970) – *Integral representation formulas and* L^p*–estimates for the* $\bar{\partial}$*-equations*, «Math. Scand.», 29, 137–160.

[8] E. M. STEIN (1972) – *Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables*. Mathematical Notes, Princenton: Princeton University Press.