Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesca Rolandi, Anna Zaretti

Un principio di massimo per la soluzione di un'equazione ellittica omogenea non lineare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.1-2, p. 23–29.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_1-2_23_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

Analisi matematica. — *Un principio di massimo per la soluzione di un'equazione ellittica omogenea non lineare.* Nota II di FRANCESCA ROLANDI e ANNA ZARETTI (*), presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

SUMMARY. — The proof of Theorem 3 stated in Note 1 is given.

3. In questa Nota si dimostra il Teorema 3 enunciato nel § 2 della Nota I. Sia g una funzione fissata (che verrà precisata in seguito) tale che:

$$(3.1) \qquad g \in H^{2\,(1)} \quad ; \quad g(x) = \varphi(x) \quad \text{per} \quad x \in \Gamma .$$

Si ponga poi: $v = u - g$ nella (2.1); si ottiene:

$$(A(v+g) + (v+g)\,|v+g|\,, h - v - g)_{L^2} \geq 0 \qquad \forall h \in K.$$

Trovare una soluzione u del problema (2.1), (2.2) equivale a cercare una funzione v tale che:

$$(3.2) \qquad (Av + (v+g)\,|v+g| + Ag\,, l - v)_{L^2} \geq 0 \qquad \forall l \in K'$$

$$(3.3) \qquad v \in K' \cap N_0$$

ove K' è l'insieme chiuso convesso di L^2 così definito:

$$K' = \{w \mid w \in L^2\,, w = v - g\,, v \in K\}.$$

Per dimostrare il Teorema 3 è essenziale premettere i seguenti lemmi:

LEMMA 1. *Detta* $\rho(x)$ *la distanza di* x *da* Γ *esiste* $\forall \varepsilon > 0$ *una funzione* $\lambda \in C^2(\overline{\Omega})$ *tale che*:

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \textit{in un intorno (dipendente da } \varepsilon\textit{) di } \Gamma \\ 0 & \textit{se } \rho(x) \geq e^{-1/\varepsilon}. \end{cases}$$

Per la dimostrazione del Lemma 1, cfr. [1].

LEMMA 2. *Si può trovare una funzione* $g(x)$ *soddisfacente le* (3.1), *tale che*:

$$(3.4) \qquad |(g\,|v+g|\,, v)_{L^2}| \leq \gamma_1 \|v\|_{H^1}^2 + \gamma_2 \|v\|_{H^1} \qquad \forall \gamma_1, \gamma_2 > 0.$$

(*) Istituto di Matematica del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività di ricerca del G.N.A.F.A.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1976.

(1) Si osservi che in questo § si porrà:

$$N = N(\Omega) \quad , \quad N_0 = N_0(\Omega) \quad , \quad L^p = L^p(\Omega) \quad , \quad H^1 = H^1(\Omega) \quad , \quad H^2 = H^2(\Omega).$$

Infatti posto: $g(x) = \lambda(x)\ \varphi(x)$ si osserva che con tale scelta della g si soddisfa alle (3.1) [2].

Inoltre risulta:

$$|(g|v+g|, v)_{L^2}| = \left|\int_\Omega \lambda\varphi\,|v+\lambda\varphi|\, v d\Omega\right| \leq C_1 \left|\int_{\rho\leq e^{-1/\varepsilon}} d\Omega\right|^{1/q} \left|\int_\Omega |v+\lambda\varphi|^p d\Omega\right|^{1/p} \cdot$$

$$\cdot \left|\int_\Omega |v|^p d\Omega\right|^{1/p} \leq C_1\psi(\varepsilon)\,\|v+\lambda\varphi\|_{L^p}\|v\|_{L^p} \leq C_2\psi(\varepsilon)\,(\|v\|^2_{L^p} + \|\lambda\varphi\|_{L^p}\|v\|_{L^p}) \leq$$

$$\leq C_2\,\psi(\varepsilon)\,(C_3\|v\|^2_{H^1} + C_4\,\psi_1(\varepsilon)\,\|v\|_{H^1}) \leq \gamma_1\|v\|^2_{H^1} + \gamma_2\|v\|_{H^1}$$

$$\left(\text{ove}\quad \psi(\varepsilon) = \left|\int_{\rho\leq e^{-1/\varepsilon}} d\Omega\right|^{1/q},\quad \psi_1(\varepsilon) = \left|\int_{\rho\leq e^{-1/\varepsilon}} d\Omega\right|^{1/p}\right),\ p \leq \frac{2n}{n-2},\ \frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Il Lemma 2 è cosi completamente dimostrato.

Si è ora in grado di dimostrare il Teorema 3.

Sia $\beta(v) = v - P_{K'}\,v$ (essendo $P_{K'}\,v = v - (v+g-M)^+ - (v+g+M)^-$ l'operatore di proiezione da L^2 in K') [3] un operatore di penalizzazione relativo a K' e si consideri la seguente equazione penalizzata associata alla (3.2):

$$(3.5)\qquad Av_\varepsilon + (v_\varepsilon + g)\,|v_\varepsilon + g| + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(v_\varepsilon) + Ag = 0 \qquad \text{q.o. in}\quad \Omega.$$

In primo luogo si dimostra che $\forall\varepsilon > 0$ esiste $v_\varepsilon \in N_0$ soddisfacente la (3.5).

A tale scopo si indica con $\{l_j\}$ il sistema ortonormale di autofunzioni relative all'operatore A e con $\{\lambda_j\}$ gli autovalori corrispondenti. Risulta:

$$a(l_j, h) = \lambda_j\,(l_j, h)_{L^2} \qquad \forall h \in H^1_0.$$

Per le ipotesi fatte il sistema $\{l_j\}$ è completo in L^2 e N_0 (cfr. [2]).

Posto inoltre:

$$v_{n\varepsilon} = \sum_{j=1}^n \chi_{jn\varepsilon}\, l_j$$

si ha:

$$Av_{n\varepsilon} = \sum_{j=1}^n \lambda_j\,\chi_{jn\varepsilon}\, l_j.$$

Si consideri ora l'equazione approssimata associata alla (3.5):

$$(3.6)\quad (Av_{n\varepsilon} + (v_{n\varepsilon}+g)\,|v_{n\varepsilon}+g| + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(v_{n\varepsilon}) + Ag, l_j)_{L^2} = 0 \qquad \forall j = 1, 2, \cdots, n.$$

(2) Si osservi che si potrebbe pensare di prendere $g = \varphi$; tuttavia, come apparirà chiaro nel corso della dimostrazione del Lemma 2, è essenziale che g non coincida con φ.

(3) Si ricorda che:

$$(v+g-M)^+ = \begin{cases} v+g-M & \text{se } v+g > M \\ 0 & \text{se } v+g \leq M \end{cases},\quad (v+g+M)^- = \begin{cases} 0 & \text{se } v+g \geq -M \\ v+g+M & \text{se } v+g < -M. \end{cases}$$

Per dimostrare l'esistenza di una soluzione della (3.6) si sfrutta il seguente Lemma (cfr. [3]):

LEMMA 3. *Sia* $\xi \to P(\xi)$ *un'applicazione continua da* $\mathbf{R}^n$ *in sè ed esista un* $\rho > 0$ *opportuno tale che*:

$$P(\xi)\cdot\xi \geq 0 \qquad \forall \xi : |\xi| = \rho$$

ove:

$$\xi\cdot\eta = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j$$

con

$$\xi = \{\xi_j\} \quad , \quad \eta = \{\eta_j\} .$$

Esiste allora ξ *tale che*: $P(\xi) = 0$ *con* $|\xi| \leq \rho$.

Per applicare il Lemma 3 si associ ad ogni vettore $\xi_\varepsilon = \{\xi_{j\varepsilon}\} \in \mathbf{R}^n$ la funzione:

$$v_{n\varepsilon} = \sum_{j=1}^{n} \xi_{j\varepsilon}\, l_j$$

e si ponga:

$$P(\xi_\varepsilon) = \{\eta_{j\varepsilon}\}$$

ove:

$$\eta_{j\varepsilon} = (Av_{n\varepsilon} + (v_{n\varepsilon} + g)\,|v_{n\varepsilon} + g| + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(v_{n\varepsilon}) + Ag\,,\, l_j)_{L^2} .$$

Risulta allora:

a)
$$P(\xi_\varepsilon)\cdot\xi_\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} \eta_{j\varepsilon}\,\xi_{j\varepsilon} =$$

$$= \left(Av_{n\varepsilon} + (v_{n\varepsilon} + g)\,|v_{n\varepsilon} + g| + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(v_{n\varepsilon}) + Ag\,,\, v_{n\varepsilon}\right)_{L^2} \geq 0$$

purchè $\| v_{n\varepsilon} \|_{H^1}$ sia sufficientemente grande.

Infatti, tenendo conto che:

$$(\beta(v_{n\varepsilon})\,,\, v_{n\varepsilon})_{L^2} \geq 0 \quad \text{e} \quad (v_{n\varepsilon}\,|v_{n\varepsilon} + g|\,,\, v_{n\varepsilon})_{L^2} \geq 0\,,$$

si ha:

$$\left(Av_{n\varepsilon} + (v_{n\varepsilon} + g)\,|v_{n\varepsilon} + g| + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(v_{n\varepsilon}) + Ag\,,\, v_{n\varepsilon}\right)_{L^2} \geq$$

$$\geq (\alpha - \gamma_1)\,\| v_{n\varepsilon} \|^2_{H^1} - \gamma_2\,\| v_{n\varepsilon} \|_{H^1} - \| Ag \|_{L^2}\,\| v_{n\varepsilon} \|_{L^2} \geq$$

$$\geq (\alpha - \gamma_1)\,\| v_{n\varepsilon} \|^2_{H^1} - C_2\,\| v_{n\varepsilon} \|_{H^1} \geq 0$$

per l'arbitrarietà di γ_1 e γ_2 e se

$$\| v_{n\varepsilon} \|_{H^1} \geq \frac{C_2}{\alpha - \gamma_1} .$$

b) L'applicazione $\xi_\varepsilon \to P(\xi_\varepsilon)$ è continua da $\mathbf{R}^n$ in sè.

Infatti l'applicazione:

$$\xi_{j\varepsilon} \to \left(A\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_{j\varepsilon}\, l_j\right) + \frac{1}{\varepsilon}\, \beta\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_{j\varepsilon}\, l_j\right) + Ag\,,\, l_j \right)_{L^2}$$

è continua sulla base $\{l_j\}$ poichè gli operatori A e β sono continui sui sottospazi a dimensione finita. Inoltre l'applicazione:

$$\xi_{j\varepsilon} \to \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_{j\varepsilon}\, l_j + g\right) \left| \sum_{j=1}^{n} \xi_{j\varepsilon}\, l_j + g \right| ,\, l_j \right)_{L^2}$$

è ovviamente continua sulla base $\{l_j\}$.

L'esistenza di una soluzione della (3.6) è pertanto assicurata dal Lemma 3 tenendo conto delle *a*), *b*).

Moltiplicando ora la (3.6) per $\chi_{jn\varepsilon}$ e sommando, si ottiene:

$$\left(Av_{n\varepsilon} + (v_{n\varepsilon} + g)\, | v_{n\varepsilon} + g | + \frac{1}{\varepsilon}\, \beta(v_{n\varepsilon}) + Ag\,,\, v_{n\varepsilon} \right)_{L^2} = 0\,. \tag{3.7}$$

Ricordando la (1.2) e la (3.4) si ottiene:

$$\alpha \| v_{n\varepsilon} \|_{H^1}^2 \leq \gamma_1 \| v_{n\varepsilon} \|_{H^1}^2 + \gamma_2 \| v_{n\varepsilon} \|_{H^1} + \| Ag \|_{L^2} \| v_{n\varepsilon} \|_{L^2}$$

da cui, per l'arbitrarietà di γ_1, segue che:

$$\| v_{n\varepsilon} \|_{H^1} \leq \text{cost} \qquad \text{(indip. da } n \text{ e da } \varepsilon) \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\, (\beta(v_{n\varepsilon})\,,\, v_{n\varepsilon})_{L^2} \leq \text{cost} \qquad \text{(indip. da } n \text{ e da } \varepsilon). \tag{3.9}$$

Per la (3.8) è allora possibile estrarre dalla successione $\{v_{n\varepsilon}\}$ una sottosuccessione, che si indicherà ancora con $\{v_{n\varepsilon}\}$, tale che:

$$\lim_{n\to\infty} v_{n\varepsilon} \underset{H^1}{=} v_\varepsilon \qquad \text{nella topologia debole,} \tag{3.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta(v_{n\varepsilon}) = \lim_{n\to\infty} (v_{n\varepsilon} - P_{K'}\, v_{n\varepsilon}) \underset{L^2}{=} \beta(v_\varepsilon) \qquad \text{nella topologia forte.} \tag{3.11}$$

Ricordando inoltre che $v_{n\varepsilon} \in H_0^1\ \forall n\,,\, \forall \varepsilon$ risulta che:

$$v_\varepsilon \in H_0^1\,. \tag{3.12}$$

Occorre ora far vedere che $Av_\varepsilon \in L^2$. A tale scopo posto:

$$\beta(v_{n\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{jn\varepsilon}\, l_j$$

moltiplicando la (3.6) per $\mu_{jn\varepsilon}$ e sommando si ottiene:

$$\left(A(v_{n\varepsilon}+g)+(v_{n\varepsilon}+g)\,|\,v_{n\varepsilon}+g\,|+\frac{1}{\varepsilon}\,\beta(v_{n\varepsilon}),\,\beta(v_{n\varepsilon})\right)_{L^2}=0\,. \tag{3.13}$$

Si osservi ora che, posto:

$$\Omega^+=\{x\,|\,x\in\Omega\,,\quad v_{n\varepsilon}(x)>M\}$$

$$\Omega^-=\{x\,|\,x\in\Omega\,,\quad v_{n\varepsilon}(x)<-M\}$$

$$\Omega^0=\{x\,|\,x\in\Omega\,,\,|\,v_{n\varepsilon}(x)\,|\leq M\}$$

ricordando le ipotesi fatte sull'operatore A, la scelta dell'operatore β e che:

$$v_{n\varepsilon}(x)+g-M=0 \qquad \text{se} \quad x\in\partial\Omega^+$$

$$v_{n\varepsilon}(x)+g+M=0 \qquad \text{se} \quad x\in\partial\Omega^-$$

risulta:

$$\begin{aligned}(A(v_{n\varepsilon}+g)\,,\,\beta(v_{n\varepsilon}))_{L^2}&=\int_{\Omega^+}(v_{n\varepsilon}+g-M)\,A(v_{n\varepsilon}+g)\,d\Omega^+ + \\ &+\int_{\Omega^-}(v_{n\varepsilon}+g+M)\,A(v_{n\varepsilon}+g)\,d\Omega^-\geq\int_{\Omega^+}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_{n\varepsilon}+g)\,a_{ij}\,\frac{\partial}{\partial x_j}(v_{n\varepsilon}+g)\,d\Omega^+ + \\ &+\int_{\Omega^-}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_{n\varepsilon}+g)\,a_{ij}\,\frac{\partial}{\partial x_j}(v_{n\varepsilon}+g)\,d\Omega^-\geq 0\,.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Dalla (3.13) utilizzando la (3.14) si ottiene successivamente:

$$\frac{1}{\varepsilon}\,\|\,\beta(v_{n\varepsilon})\,\|_{L^2}^2\leq\|\,v_{n\varepsilon}+g\,\|_{L^4}^2\,\|\,\beta(v_{n\varepsilon})\,\|_{L^2}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\,\|\,\beta(v_{n\varepsilon})\,\|_{L^2}\leq \text{cost (indip. da } n \text{ e da } \varepsilon). \tag{3.15}$$

Moltiplicando ora la (3.6) per $-\lambda_j\,\chi_{jn\varepsilon}$ e sommando si ottiene:

$$\begin{aligned}&\|\,Av_{n\varepsilon}\,\|_{L^2}^2+((v_{n\varepsilon}+g)\,|\,v_{n\varepsilon}+g\,|\,,\,Av_{n\varepsilon})_{L^2}+ \\ &+\frac{1}{\varepsilon}\,(\beta(v_{n\varepsilon})\,,\,A(v_{n\varepsilon}+g)-Ag)_{L^2}+(Ag\,,\,Av_{n\varepsilon})_{L^2}=0.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Tenendo conto delle (3.14), (3.15) si ottiene dalla (3.16):

$$\|\,Av_{n\varepsilon}\,\|_{L^2}^2\leq\|\,v_{n\varepsilon}+g\,\|_{L^4}^2\,\|\,Av_{n\varepsilon}\,\|_{L^2}+\frac{1}{\varepsilon}\,\|\,\beta(v_{n\varepsilon})\,\|_{L^2}\,\|\,Ag\,\|_{L^2}+\|\,Ag\,\|_{L^2}\,\|\,Av_{n\varepsilon}\,\|_{L^2}$$

da cui:

$$\|Av_{n\varepsilon}\|_{L^2} \leq \text{cost (indip. da } n, \varepsilon) \tag{3.17}$$

e quindi dalla successione $\{Av_{n\varepsilon}\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione, chiamata ancora $\{Av_{n\varepsilon}\}$, tale che:

$$\lim_{n\to\infty} Av_{n\varepsilon} \underset{L^2}{=} Av_\varepsilon \qquad \text{nella topologia debole.} \tag{3.18}$$

Per le (3.12), (3.18) si può concludere che:

$$v_\varepsilon \in N_0.$$

Rimane da dimostrare che v_ε soddisfa la (3.5).

Tenendo conto delle (3.10), (3.11), (3.18) e passando al limite per $n \to \infty$ nella (3.6) si ottiene:

$$(Av_\varepsilon + (v_\varepsilon + g)\,|v_\varepsilon + g\,| + \frac{1}{\varepsilon}\,\beta(v_\varepsilon) + Ag, l_j)_{L^2} = 0 \qquad \forall j$$

cioè la (3.5).

Si osservi ora che, per le (3.8), (3.17), dalla successione $\{v_\varepsilon\}$ si può estrarre una sottosuccessione, indicata ancora con $\{v_\varepsilon\}$, per cui risulti:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon \underset{H^1}{=} v & \text{nella topologia debole} \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} Av_\varepsilon \underset{L^2}{=} Av & \text{nella topologia debole} \end{cases} \tag{3.19}$$

da cui:

$$v \in N_0. \tag{3.20}$$

Per dimostrare che $v \in K'$, si osservi che dalle (3.19) segue:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \beta(v_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} (v_\varepsilon - P_{K'}\,v_\varepsilon) \underset{L^2}{=} v - P_{K'}\,v = \beta(v) \quad \text{nella topologia forte.} \tag{3.21}$$

Inoltre dalle (3.9), (3.21) si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} (\beta(v_\varepsilon), v_\varepsilon)_{L^2} &= 0 = (\beta(v), v)_{L^2} = \\ &= (v - P_{K'}\,v, v)_{L^2} = (v - P_{K'}\,v, v - P_{K'}\,v)_{L^2} + (v - P_{K'}\,v, P_{K'}\,v)_{L^2} \geq \\ &\geq \|v - P_{K'}\,v\|^2_{L^2} = \|\beta(v)\|^2_{L^2} \end{aligned} \tag{3.22}$$

essendo $(v - P_{K'}\,v, P_{K'}\,v)_{L^2} \geq 0$ per una nota proprietà degli operatori di proiezione. Si può quindi concludere che $\|\beta(v)\| = 0$ e quindi che:

$$v \in K'. \tag{3.23}$$

Valendo le (3.20), (3.23), v sarà una soluzione del Problema (3.2), (3.3) se si mostrerà che v soddisfa la (3.2).

Moltiplicando scalarmente la (3.5) per $l - v_\varepsilon$ (ove l è una generica funzione di K′) ed osservando che:

$$(\beta(v_\varepsilon), l - v_\varepsilon)_{L^2} = (\beta(v_\varepsilon) - \beta(l), l - v_\varepsilon)_{L^2} \leq 0$$

si ottiene:

$$(3.24) \qquad (Av_\varepsilon + (v_\varepsilon + g)\,|v_\varepsilon + g| + Ag, l - v_\varepsilon)_{L^2} \geq 0 \qquad \forall l \in K'.$$

Ricordando le (3.19) e che l'immersione di N_0 in L^3 è completamente continua, passando al limite per $\varepsilon \to 0$ nella (3.24) si ottiene la (3.2).

Il teorema di esistenza è cosi completamente dimostrato.

Rimane da dimostrare l'unicità.

Siano v_1 e v_2 due eventuali soluzioni del Problema (3.2), (3.3); v_1 e v_2 soddisfano allora rispettivamente le disequazioni:

$$(Av_1 + (v_1 + g)\,|v_1 + g| + Ag, l - v_1)_{L^2} \geq 0 \qquad \forall l \in K'$$

$$(Av_2 + (v_2 + g)\,|v_2 + g| + Ag, l - v_2)_{L^2} \geq 0 \qquad \forall l \in K'.$$

Ponendo $l = v_2$ e $l = v_1$, rispettivamente nella prima e nella seconda disequazione, $w = v_1 - v_2$, sommando si ottiene successivamente:

$$(Aw + (v_1 + g)\,|v_1 + g| - (v_2 + g)\,|v_2 + g|, w)_{L^2} \leq 0$$

$$\alpha \|w\|^2_{H^1} + (w\,|v_1 + g|, w)_{L^2} \leq |((v_2 + g)(|v_2 + g| - |v_1 + g|), w)|_{L^2} \leq c_3 \|w\|_{L^2}.$$

Ne segue che $w = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. HOPF (1951) – *Über die Aufangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*, «Math. Nachr.», *4*.

[2] J. L. LIONS (1955) – *Problèmes aux limites en théorie des distributions*, «Acta Math.», *94*.

[3] J. L. LIONS (1969) – *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod–Gauthier–Villars, Paris.