

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

ELISABETTA STRICKLAND

**Sulle serie di composizione di una classe di gruppi  
finiti**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 61 (1976), n.1-2, p. 20-22.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1976\\_8\\_61\\_1-2\\_20\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_1-2_20_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Teoria dei gruppi.** — *Sulle serie di composizione di una classe di gruppi finiti.* Nota (\*) di ELISABETTA STRICKLAND, presentata dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this paper we study the class (D) of finite groups which admit a unique disposition for their composition factors. Precisely it is shown that, in the soluble case, a group  $G$  whose proper subgroups belong to the class (D), has order divisible by at most two primes. A counterexample is given showing that the above property doesn't hold for a soluble D-group in general.

#### INTRODUZIONE

Dato un gruppo  $G$ , una catena di suoi sottogruppi:

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_{k-1} \triangleright G_k = \{1\}$$

ciascuno massimale nel precedente e terminante con il sottogruppo  $\{1\}$ , si dice «serie di composizione» di  $G$ . L'intero  $k$  si chiama «lunghezza» della serie e i quozienti  $G_{i-1}/G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  i «quozienti di composizione» ed i loro ordini i «fattori di composizione». Ogni gruppo finito  $\neq \{1\}$  ammette una serie di composizione. La considerazione di serie di vario tipo permette la determinazione di invarianti per un gruppo  $G$  o meglio, per una sua classe di isomorfismo. Se un gruppo  $G$  ammette una serie di composizione, come è noto, il Teorema di Jordan-Hölder permette di dire che la lunghezza di una tale serie è un invariante. Per lo stesso teorema, l'insieme dei fattori di composizione e l'insieme dei gruppi semplici che compaiono come quozienti di composizione sono invarianti.

Un altro invariante è il numero di modi in cui i fattori di composizione compaiono ordinatamente come ordini dei quozienti di una serie di composizione. Ad esempio, 2 e 3 compaiono solo nell'ordine  $(2, 3)$  in  $S^3$ , mentre compaiono negli ordini  $(2, 3)$  e  $(3, 2)$  nel gruppo  $C_6$ , ciclico di ordine 6. Poiché non vi sono altri gruppi di questo ordine, il numero delle possibili disposizioni dei fattori di composizione di un gruppo di ordine 6 costituisce un invariante. Analogamente il fatto di ammettere un'unica disposizione dei fattori di composizione caratterizza  $A^4$ , gruppo alterno su quattro elementi, fra i gruppi di ordine 12, ed  $S^4$ , gruppo simmetrico su quattro elementi, tra i gruppi di ordine 24.

Scopo della presente Nota è lo studio di alcune proprietà generali della classe (D) dei gruppi finiti dotati di una sola disposizione dei fattori di composizione, proprietà collegate alle precedenti osservazioni.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1976.

## § 1. IL CASO RISOLUBILE

È una conseguenza piuttosto ovvia delle definizioni date, che la proprietà (D) si conserva per i sottogruppi normali  $H$  di un gruppo  $G \in (D)$  e per i relativi quozienti  $G/H$ . In generale esistono gruppi non isomorfi dello stesso ordine che ammettono lo stesso numero di disposizioni dei fattori di composizione basta pensare a due  $p$ -gruppi dello stesso ordine.

Inoltre si ha il seguente:

**TEOREMA 1.1.** *Sia  $G$  un gruppo finito risolubile. Allora  $G$  è nilpotente se e solo se,  $G$  ammette tutte le possibili disposizioni dei fattori di composizione.*

*Dimostrazione.* Se  $G$  ammette tutte le disposizioni, sia  $S$  un  $p$ -Sylow di  $G$  con  $|S| = p^h$ . Poiché  $G$  è risolubile, i fattori sono numeri primi, ed esisterà allora, per l'ipotesi, una serie i cui ultimi  $h + 1$  termini sono a quozienti di ordine  $p$ :

$$\cdots \triangleright H_1 \triangleright H_2 \triangleright \cdots \triangleright H_{h+1} = \{1\}.$$

Il sottogruppo  $H_1$  è allora Sylow, perché ha ordine  $p^h$  ed è subnormale, perché compare in una serie normale. Ciò implica  $H_1$  normale in  $G$  e dunque, essendo  $p$  generico,  $G$  nilpotente. Il viceversa è evidente, q.e.d.

**COROLLARIO 1.2.** *Se  $G \in (D)$  è nilpotente, allora  $G$  è un  $p$ -gruppo.*

*Dimostrazione.* Segue subito da 1.1.

È possibile a questo punto provare il seguente:

**TEOREMA 1.3.** *Sia  $G$  risolubile finito. Condizione necessaria e sufficiente affinché  $G$  e tutti i suoi sottogruppi godano della proprietà D è che  $G$  sia somma (nel senso della teoria degli insiemi) dei suoi sottogruppi di Sylow.*

*Dimostrazione.* Sia  $G \in (D)$  assieme a tutti i suoi sottogruppi. Sia  $g$  un arbitrario elemento di  $G$ . Si consideri il sottogruppo ciclico  $H = \langle g \rangle$ ,  $H \leq G$ .  $H$  è un D-gruppo ed è nilpotente, quindi, per 1.2, ha ordine la potenza di un primo, cioè  $o(g) = p^n$ . Viceversa, sia  $G$  risolubile finito somma dei suoi sottogruppi di Sylow. Proviamo che allora  $G$  (e quindi i suoi sottogruppi) ammettono un'unica disposizione dei fattori di composizione. Sia  $G$  il minimo controesempio e  $|G| = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ . Se  $G'$  è il sottogruppo derivato di  $G$ ,  $G'$  contiene le potenze massime di  $n - 1$  primi che dividono l'ordine di  $G$ , altrimenti il quoziente abeliano  $G/G'$  con ordine divisibile per due o più primi distinti porta elementi di periodo misto. Del resto  $G' \not\leq G$ , quindi sarà  $G' = p_1^{k_1} \cdots p_i^{h_i} \cdots p_n^{k_n}$ , con  $0 \leq h_i < k_i$ , per un certo  $1 \leq i \leq n$ .

Sia  $A$  un sottogruppo normale massimale di  $G$ .  $A$  ha indice primo in  $G$ , quindi  $G/A$  è abeliano e  $A \geq G'$ . Segue  $[G : A] = p_i$ . Cioè ogni serie di composizione di  $G$  parte con un quoziente di ordine  $p_i$ . Siano  $A$  e  $B$  i secondi termini di due arbitrarie serie di composizione di  $G$ . Si consideri  $A \cap B$ . Essendo

G il minimo controesempio, i quozienti che seguono  $A \cap B$  hanno ordini univocamente determinati e quelli che lo precedono anche, quindi le due serie ammettono la stessa disposizione per i fattori di composizione, *q.e.d.*

Faremo ora uso del seguente

LEMMA 1.4. (Higman [5]). *Sia G finito risolubile somma dei suoi sottogruppi di Sylow. Allora l'ordine di G è divisibile per al più due primi distinti.*

Si noti che 1.3. non è valido se la proprietà (D) vale solo per i sottogruppi propri di G. Il gruppo ciclico di ordine 6,  $C_6$  è un esempio. Tuttavia, dal Lemma 1.4. e dal Teorema 1.3. segue che:

TEOREMA 1.5. *Se G è risolubile finito e se  $H \in (D)$  per ogni  $H \leq G$ , allora  $|G|$  è divisibile per al più due primi distinti.*

Ed inoltre:

TEOREMA 1.6. *Un gruppo risolubile finito G, minimale non (D) è ciclico di ordine  $p \cdot q$  ( $p \neq q$ ) primi.*

*Dimostrazione.* G non è somma dei suoi sottogruppi di Sylow, per il Teorema 1.3. e quindi esiste  $x \in G$  di ordine  $pq$  ( $p \neq q$ , primi). Si ha  $\langle x \rangle \notin (D)$  e pertanto:  $\langle x \rangle = G$ , *q.e.d.*

## § 2. UN CONTROESEMPIO

È spontaneo ora chiedersi se un gruppo  $G \in (D)$  risolubile arbitrario abbia anch'esso ordine divisibile per al più due primi distinti. Ebbene, la proprietà non vale in generale, come dimostra il seguente controesempio.

Si costruisca il gruppo  $(Z_5 \times Z_5) \tilde{\times} S_3$ , cioè il prodotto semidiretto del gruppo abeliano elementare di ordine 25 e del gruppo delle permutazioni su tre elementi. È facile provare che tale gruppo, di ordine  $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$  ammette come unica disposizione per i fattori di composizione la  $(2, 3, 5, 5)$ , con la serie

$$G_{150} \triangleright H_{75}^1 \triangleright H_{25}^2 \triangleright H_5^3 \triangleright \{1\}.$$

Tale controesempio può essere generalizzato prendendo il gruppo  $(Z_p \times Z_p) \tilde{\times} S_3$ ,  $p$  primo,  $p \neq 2$ .

Desidero ringraziare a conclusione di questa esposizione il Prof. Mario Curzio dell'Università di Napoli ed il prof. Corrado De Concini dell'Università di Pisa per i consigli ricevuti.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] D. GORENSTEIN (1968) - *Finite Groups*, Harper and Row.
- [2] M. HALL (1959) - *The theory of groups*, MacMillan, N.Y.
- [3] H. ZASSENHAUS (1958) - *The Theory of groups*, Chelsea.
- [4] B. HUPPERT (1967) - *Endliche Gruppen I*, Springer.
- [5] G. HIGMAN (1957) - *Finite groups in which every element has prime power order*, «J. London, Math. Soc.», 32,