Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alberto Valli

L'equazione di Eulero dei fluidi bidimensionali in domini con frontiera variabile

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **61** (1976), n.1-2, p. 1–5.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_61_1-2_1_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1976 (Luglio–Agosto)

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione)

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Matematica. — *L'equazione di Eulero dei fluidi bidimensionali in domini con frontiera variabile.* Nota (*) di ALBERTO VALLI, presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

SUMMARY. — We prove the existence of a unique solution (in classical sense) of the two-dimensional non-stationary Euler equation, in a bounded and simply-connected domain which dependes on the time.

INTRODUZIONE

Come è noto, il problema di Cauchy per l'equazione dei fluidi incomprimibili e non viscosi (equazione di Eulero) è stato risolto «in grande» da Wolibner [3], Judovic [1]; successivamente Kato [2] ha ottenuto una soluzione classica in forma più semplice e più espressiva dal punto di vista cinematico.

Mi sono posto il problema di estendere la tecnica di Kato al caso di un fluido che si muove entro pareti variabili col tempo, secondo una legge assegnata. La condizione alla frontiera è quella naturale, che impone a una particella di fluido sulla frontiera di avere la stessa velocità normale che ha la frontiera in quel punto (la velocità del fluido è «tangenziale» alla frontiera mentre questa si sposta).

In questa Nota preventiva riporto il teorema di esistenza e unicità che ho ottenuto dando lo schema della dimostrazione. La dimostrazione completa è in corso di pubblicazione nella rivista «Ricerche di Matematica».

(*) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1976.

Le difficoltà maggiori di questo tipo di procedimento sono la dimostrazione della regolarità della soluzione del problema (*) (cfr. § 2) e la dimostrazione della compatezza dell'insieme S (cfr. § 3); la dipendenza dal tempo del dominio Ω_t diventa in questi casi un ostacolo da superare con tecniche più complesse che nel problema a dominio fisso.

1. NOTAZIONI

Sia Ω_t un dominio limitato e semplicemente connesso del piano, di frontiera $\partial\Omega_t \equiv \Gamma_t$, variabile per $t \in [0, T]$, e tale che mis $(\Omega_t) =$ costante; siano:

$$Q_T \equiv \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 \times [0, T] \mid x \in \Omega_t\}$$

$$\mathscr{F} Q_T \equiv \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 \times [0, T] \mid x \in \Gamma_t\}.$$

Definiamo gli spazi:

$$C^{j,k}(\overline{Q_T}) \equiv \{\varphi : \overline{Q_T} \to \mathbf{R}^n \mid D_x^p D_t^q \varphi \in C^0(\overline{Q_T}), 0 \leq p \leq j, \\ 0 \leq q \leq k, p + q \leq \max(j, k)\}$$

$$C^{j+\delta,k}(\overline{Q_T}) \equiv \{\varphi \in C^{j,k}(\overline{Q_T}) \mid D_x^p D_t^q \varphi \text{ è holderiana di esponente } \delta \text{ in } x, \text{ uniformemente in } t\}$$

$$C^{j,k+\varepsilon}(\overline{Q_T}) \equiv \{\varphi \in C^{j,k}(\overline{Q_T}) \mid D_x^p D_t^q \varphi \text{ è holderiana di esponente } \varepsilon \text{ in } t, \text{ uniformemente in } x\}$$

$$C^{j+\delta,k+\varepsilon}(\overline{Q_T}) \equiv C^{j+\delta,k}(\overline{Q_T}) \cap C^{j,k+\varepsilon}(\overline{Q_T})$$

ove $j, k \in \mathbf{N}$, e $0 < \delta < 1$, $0 < \varepsilon < 1$.

Supponiamo che:

(i) esista $\Lambda : \overline{Q_T} \to \overline{B_1} \times [0, T]$, $\Lambda(x, t) \equiv (\mu(x, t), \nu(x, t), t)$, bigettiva e di classe $C^{3+\delta,2+\delta}$ assieme alla sua inversa Λ^{-1}, e tale che

$$\Lambda(\mathscr{F} Q_T) = \partial B_1 \times [0, T].$$

con $B_1 \equiv \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1\}$, e $\delta > 0$ arbitrariamente piccolo.

Da questa ipotesi segue facilmente che:

(ii) esiste $\Phi : \overline{Q_T} \to \mathbf{R}$, di classe $C^{3+\delta,2+\delta}(\overline{Q_T})$, tale che

$\Omega_t = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \Phi(x, t) < 0\}$, $\Gamma_t = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \Phi(x, t) = 0\}$ e

$|\operatorname{grad}_x \Phi| \neq 0$ su $\mathscr{F} Q_T$.

Si può quindi scrivere l'equazione di Eulero in Q_T:

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} D_t v + (v\cdot\text{grad})\, v = -\text{grad}\, p + b & \text{in } Q_T \\ \text{div}\, v = 0 & \text{in } Q_T \\ v\cdot n = -\dfrac{D_t \Phi}{|\text{grad}_x \Phi|} & \text{su } \mathscr{F} Q_T \\ v|_{t=0} = a & \text{in } \Omega_0 . \end{cases}$$

Vale allora il seguente teorema:

TEOREMA. *Sia* $a \in C^{2+\theta}(\overline{\Omega_0})$, $\text{div}\, a = 0$ *in* Ω_0, $a\cdot n|_{t=0} = -\left(\dfrac{D_t \Phi}{|\text{grad}_x \Phi|}\right)\Big|_{t=0}$ *su* Γ_0, *e* $b \in C^{2+\theta,\theta}(\overline{Q_T})$, *con* $0 < \theta < 1$. *Allora esiste una soluzione* (v, p) *di* (E) *tale che* v, p *e tutte le loro derivate che compaiono in* (E) *stanno in* $C^0(\overline{Q_T})$. *Tale soluzione è unica a meno di una funzione arbitraria di* t *che può essere aggiunta a* p.

2. PRELIMINARI

Poniamo:

$$\Xi(s, t) \equiv \int_0^{X_t^{-1}(s)} \frac{-D_t \Phi(X_t^1(\sigma), X_t^2(\sigma), t)}{|\text{grad}_x \Phi(X_t^1(\sigma), X_t^2(\sigma), t)|}\, d\sigma$$

ove $X_t \equiv (X_t^1, X_t^2)$ costituisce una rappresentazione parametrica di Γ_t rispetto all'ascissa curvilinea contata a partire da un arbitrario punto di Γ_t. Vogliamo studiare l'esistenza e la regolarità della soluzione del problema:

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta\psi(x, t) = \varphi(x, t) & \text{in } Q_T \\ \psi(x, t)|_{x\in\Gamma_t} = \Xi(s, t) & \text{su } \mathscr{F} Q_T \end{cases}$$

ove $\varphi \in C^{1+\varepsilon,1+\varepsilon}(\overline{Q_T})$ con $0 < \varepsilon \leq \theta$.

L'idea è quella di trasportare, tramite la funzione Λ, il problema (*) su $B_1 \times [0, T]$, ossia su un dominio fisso nel tempo, in modo che i risultati di regolarità si ottengano più facilmente.

Nel far questo si deve però considerare un problema differenziale dove i coefficienti dell'operatore vengono a dipendere dal tempo:

$$(**) \qquad \begin{cases} -\mathscr{E}(t)\, w = \varphi \circ \Lambda^{-1} & \text{in } B_1 \times [0, T] \\ w|_{\partial B_1 \times [0,T]} = \Xi \circ \Lambda^{-1}|_{\partial B_1 \times [0,T]} & \text{su } \partial B_1 \times [0, T] . \end{cases}$$

Sfruttando certe proprietà delle funzioni $\gamma \in C^{k+\delta, j+\varepsilon}(\overline{B_1} \times [0, T])$ (viste come funzioni definite su $[0, T]$ e a valori in spazi di funzioni holderiane su $\overline{B_1}$), e le classiche maggiorazioni di Schauder, si ottiene che esiste la soluzione di (**) ed è in $C^{3+\delta', 1+\delta'}(\overline{B_1} \times [0, T])$, per ogni δ' con $0 < \delta' < \delta$.

Ritornando indietro con la Λ^{-1} su $\overline{Q_T}$, si deduce da questo fatto che anche la soluzione del problema (*) è in $C^{3+\delta',1+\delta'}(\overline{Q_T})$.

3. Costruzione di una soluzione

Si costruisce una soluzione di (E) risolvendo dapprima un problema opportunamente indebolito: facendo il rotore della prima equazione di (E) si ottiene:

$$\begin{cases} \zeta = \operatorname{rot} v & \text{in } Q_T \qquad (3.1) \\ D_t \zeta + \operatorname{div}(\zeta v) = \operatorname{rot} b \equiv \beta & \text{in } Q_T . \qquad (3.2) \end{cases}$$

Per risolvere il sistema (3.1), (3.2) procediamo in questo modo: assegnata una funzione φ in un'opportuna classe S, costruiamo (tramite la soluzione del problema (*)), una funzione v con le seguenti proprietà:

$$\tag{3.3} \begin{cases} \operatorname{rot} v = \varphi & \text{in } Q_T \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{in } Q_T \\ v \cdot n = \dfrac{-D_t \Phi}{|\operatorname{grad}_x \Phi|} & \text{su } \mathscr{F} Q_T . \end{cases}$$

Nota la v, costruiamo le soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria:

$$\tag{3.4} \frac{dz(t)}{dt} = v(z(t), t) \qquad \text{in } \overline{Q}_T$$

ove $z(t) : [0, T] \to \overline{Q_T}$. Queste soluzioni sono le linee di corrente di v, che permettono di costruire la soluzione di (3.2); infatti se $U_{t,s}(y)$ è la soluzione di (3.4) con la condizione iniziale $z(s) = y \in \overline{\Omega_s}$, la soluzione di (3.2) con la condizione iniziale $\zeta|_{t=0} = \operatorname{rot} a \equiv \alpha$ è data da:

$$\tag{3.5} \zeta(x, t) = \alpha(U_{0,t}(x)) + \int_0^t \beta(U_{s,t}(x), s)\, ds .$$

Ad ogni $\varphi \in S$ si è così associata $\zeta \equiv F[\varphi]$. Basta trovare un punto unito di F per avere una funzione ζ che soddisfa il sistema (3.1), (3.2) assieme con la v trovata in (3.3).

Applicando il teorema di Schauder (dopo aver definito con accuratezza lo spazio S in cui varia φ) riusciamo a dimostrare l'esistenza di un punto fisso per F.

4. Dimostrazione del Teorema

Ottenuto un punto unito $\varphi = \zeta \equiv F[\varphi]$ per la F, consideriamo la v che si ottiene dalla (3.3) associata a questo punto unito: è molto semplice a questo punto osservare che esiste una funzione p tale che la coppia (v, p) è soluzione di (E). Basta sfruttare le proprietà di v e i classici risultati sulle funzioni a rotore nullo.

Si ottiene poi direttamente l'unicità della soluzione, nel senso richiesto dal Teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. I. JUDOVIC (1963) – *Flussi non stazionari di un fluido ideale incomprimibile*, «Z. Vycisl. Mat. i Fiz.», *3*, 1032–1066. [in russo].

[2] T. KATO (1967) – *On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation*, «Arch. Rational Mech. Anal.», *25*, 188–200.

[3] W. WOLIBNER (1933) – *Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment longue*, «Math. Z.», *37*, 698–726.