Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Elio Ganoutas

Su alcune proprietà di un'estensione alle differenze finite dell'equazione di Schrödinger

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **60** (1976), n.6, p. 835–838.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1976_8_60_6_835_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

SEZIONE II

(Fisica, chimica, geologia, paleontologia e mineralogia)

Fisica. — *Su alcune proprietà di un'estensione alle differenze finite dell'equazione di Schrödinger.* Nota di ELIO GANOUTAS, presentata [*] dal Corrisp. P. CALDIROLA.

SUMMARY. — The mathematical properties of a finite difference equation derived by introducing a fundamental time interval in the Schrödinger equation are studied.

Its physically acceptable solutions form a subspace of the Hilbert space.

This equation is applied to a free electron and some peculiar properties are elucidated.

1. Recentemente la necessità di introdurre nella teoria delle particelle elementari un intervallo di tempo fondamentale τ_0, ha portato Caldirola [1] a generalizzare l'equazione di Schrödinger nella seguente equazione alle differenze finite:

$$i\hbar \left[\frac{\psi\left(t+\frac{\tau_0}{2}\right) - \psi\left(t-\frac{\tau_0}{2}\right)}{\tau_0} \right] = \hat{\mathrm{H}}\psi(t) . \tag{1}$$

ove $\hat{\mathrm{H}}$ è il noto operatore Hamiltoniano. Di tale equazione sono state discusse alcune interessanti conseguenze immediate. Le sue soluzioni fisiche per un $\hat{\mathrm{H}}$ indipendente dal tempo sono sovrapposizioni di soluzioni stazionarie del tipo

$$\psi(t) = u_w \exp\left[-i \left(\frac{2}{\tau_0} \arcsin \frac{w\tau_0}{2\hbar} \right) t \right] . \tag{2}$$

essendo $\hat{\mathrm{H}} u_w = w \cdot u_w$.

Consideriamo ora un'equazione differenziale

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathring{\mathrm{H}}\psi \tag{3}$$

e cerchiamo di definire l'operatore $\mathring{\mathrm{H}}$ in modo che le precedenti soluzioni, siano soluzioni anche di questa.

Dalle (2) e (3) si ha

$$i\hbar u_w \left[-i \left(\frac{2}{\tau_0} \arcsin \frac{w\tau_0}{2\hbar} \right) \right] \cdot \exp\left[-\left(\frac{2}{\tau_0} \arcsin \frac{w\tau_0}{\hbar} \right) t \right] =$$

$$= \mathring{\mathrm{H}} u_w \cdot \exp\left[-\left(\frac{2}{\tau_0} \arcsin \frac{w\tau_0}{2\hbar} \right) t \right]$$

(*) Nella seduta del 10 giugno 1976.

(1) CALDIROLA P., *On the introduction of a fundamental interval of Time in Quantum Mechanics*, in « Lettere Nuovo Cimento », *16*, 151 (1976).

cioè

$$\frac{2\hbar}{\tau_0}\, u_w \arcsin \frac{w\tau_0}{2\hbar} = \tilde{\mathrm{H}} \cdot u_w \,. \tag{4}$$

Da questa segue la definizione dell'operatore $\tilde{\mathrm{H}}$ da introdurre nell'equazione (3)

$$\tilde{\mathrm{H}} \equiv \frac{2\hbar}{\tau_0} \arcsin \frac{\tau_0}{2\hbar}\, \hat{\mathrm{H}} \,. \tag{5}$$

Applicando ora $\tilde{\mathrm{H}}$ su un'autofunzione di $\hat{\mathrm{H}}$, ψ_w, si ha

$$\tilde{\mathrm{H}}\psi_w = \frac{2\hbar}{\tau_0} \arcsin \frac{\tau_0 w}{2\hbar} \cdot \psi_w \,;$$

quindi deve essere

$$\left| \frac{\tau_0 w}{2\hbar} \right| \leq 1 \,. \tag{6}$$

Sviluppando la (5) in serie di potenze si ha

$$\tilde{\mathrm{H}} = \frac{2\hbar}{\tau_0} \left[\frac{\tau_0}{2\hbar}\, \hat{\mathrm{H}} + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{\tau_0}{2\hbar} \right)^3 \hat{\mathrm{H}}^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{\tau_0}{2\hbar} \right)^5 \hat{\mathrm{H}}^5 + \cdots \right] ;$$

perciò, essendo $\hat{\mathrm{H}}$ un operatore autoaggiunto, lo è anche l'operatore $\tilde{\mathrm{H}}$. L'autoaggiuntezza di $\tilde{\mathrm{H}}$ assicura la conservazione della norma delle soluzioni della (3) e quindi l'interpretazione fisica di queste.

La limitazione $|w| \leq \dfrac{2\hbar}{\tau_0}$ indica che, tra le autofunzioni di $\hat{\mathrm{H}}$, sono autofunzioni anche di $\tilde{\mathrm{H}}$ solo quelle che corrispondono ad autovalori soddisfacenti la (6).

Le soluzioni della (3) formano un sottospazio $\mathscr{S}$ dello spazio $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}_3)$ di Hilbert, sotteso dalla autofunzioni di $\tilde{\mathrm{H}}$.

Per ragioni di consistenza occorre associare all'osservabile A, non l'operatore $\hat{\mathrm{A}}$, costruito usualmente ($\vec{x} \rightarrow \hat{\vec{x}} \equiv \cdot\, \vec{x}$, $\vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} - i\hbar$ grad) ma l'operatore $\tilde{\mathrm{A}} = \mathrm{P}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{P}$, essendo P il proiettore ortogonale in $\mathscr{S}$.

2. Considerando $\psi \in \mathscr{S}$ e quindi $\mathrm{P}\psi = \psi$, vale la seguente relazione:

$$\langle \tilde{\mathrm{A}} \rangle = \langle \hat{\mathrm{A}} \rangle \,; \tag{7}$$

si ha infatti

$$(\psi \,, \mathrm{P}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{P}) = (\mathrm{P}\psi \,, \hat{\mathrm{A}}\mathrm{P}\psi) = (\psi \,, \hat{\mathrm{A}}\psi).$$

Essendo inoltre:

$$[\tilde{\mathrm{A}} \,, \tilde{\mathrm{H}}] = \mathrm{P}\, [\hat{\mathrm{A}} \,, \tilde{\mathrm{H}}]\, \mathrm{P} \,, \tag{8}$$

ne deriva la relazione notevole:

$$\langle \dot{\text{A}} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{\text{A}}, \tilde{\text{H}}] \rangle . \tag{9}$$

In particolare per la posizione $(\text{A} \equiv \vec{x})$ della particella libera $\left(w = \frac{p^2}{2m}\right)$ si ha

$$\langle \dot{\vec{x}} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \left[\vec{x}\,, \frac{2\hbar}{\tau_0} \text{arc sin} \left(\frac{\tau_0}{2\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} \right) \right] \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\vec{p}/m}{\sqrt{1 - \frac{\tau_0^2}{4\hbar^2} \frac{p^4}{4m^2}}} \right\rangle$$

in accordo con il risultato ottenuto da Caldirola col metodo della fase stazionaria.

Dalla (9) si deduce che le costanti del moto sono quelle osservabili A, tale che $\hat{\text{A}}$, l'operatore ordinario associato, commuta con $\tilde{\text{H}}$ e quindi con $\hat{\text{H}}$. Pertanto le costanti del moto sono le stesse della teoria ordinaria.

Si sottolinea il fatto che la limitazione in un sottospazio dello spazio di Hilbert e la definizione di operatori $\tilde{\text{A}}$ diversi da quelli ordinari, derivano dall'impossibilità di considerare intervalli di tempo arbitrariamente piccoli.

Per questi nuovi operatori $\tilde{\text{A}} \neq \hat{\text{A}}$ si ha la relazione:

$$[\tilde{\text{A}}, \tilde{\text{B}}] \neq [\hat{\text{A}}, \hat{\text{B}}] .$$

3. Nel caso della particella libera $\left(w = \frac{p^2}{2m}\right)$ dalla (6) si ha $\left| \frac{\tau_0 p^2}{4m\hbar} \right| \leq 1$, per cui

$$|p| \leq \sqrt{\frac{4m\hbar}{\tau_0}} . \tag{10}$$

In particolare la (10) comporta che la soluzione generale [2] della (3), $\psi(x\,;t)$ sia data dalla:

$$\psi(x\,;t) = \int_{-\sqrt{\frac{4m\hbar}{\tau_0}}}^{\sqrt{\frac{4m\hbar}{\tau_0}}} a(p)\, e^{i\left[\frac{\text{P}}{\hbar}x - w(p)t\right]} dp \tag{11}$$

con

$$w(p) = \frac{2}{\tau_0} \text{arc sin} \frac{p^2 \tau_0}{4m\hbar^2} . \tag{12}$$

(2) Per semplicità considereremo il caso di moto unidimensionale $(p = p_x)$.

Nella (11) l'integrale ha limiti finiti. Esso può essere estesa da $-\infty$ a $+\infty$ introducendo per $a(p)$ una *funzione a supporto compatto*, per cui

$$a(p) = 0 \qquad \text{per} \;\; p \;\; \text{est} \left(-\sqrt{\frac{4m\hbar}{\tau_0}}, \sqrt{\frac{4m\hbar}{\tau_0}}\right).$$

Ne consegue in particolare che la norma della funzione dello stato inziale $|\psi(x;0)|$ non può essere una gaussiana.

La relazione (10) implica che non esiste un pacchetto d'onda associato alla particella con un $\Delta p_x \geq \sqrt{\frac{4m\hbar}{\tau_0}}$; corrispondentemente (data la relazione $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$) si avrà una indeterminazione Δx della posizione x, tale che

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p_x} \geq \frac{\hbar}{\sqrt{\frac{4m\hbar}{\tau_0}}} \simeq \sqrt{\frac{\tau_0 \hbar}{m}} .$$

Per un elettrone quest'ultima diseguaglianza diventa

$$\Delta x \gtrsim \sqrt{\tau_0 \lambda_c}$$

ove $r_0 = \tau_0 c \simeq \frac{e^2}{m_0 c^2}$ è il raggio classico dell'elettrone e $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c}$ è la lunghezza Compton dello stesso.

Essendo $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ la costante di struttura fine, si ottiene

$$\Delta x \gtrsim r_0 \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = r_0 \sqrt{137} .$$

Si potrebbe infine verificare come sia possibile associare alla (3) la definizione di una densità di probabilità e di corrente di probabilità che soddisfano ad un'equazione di continuità.

L'Autore ringrazia R. Bonifacio e L. A. Lugiato per le utili discussioni.